OBJEKTIVIERUNG UND OPTIMIERUNG DER ZEITSCHRITTWAHL BEI PROGNOSE-GLEICHUNGEN AM BEISPIEL EINES ÄQUIVALENT-BAROTROPEN MODELLS FÜR DIE NORD-HEMISPHÄRE

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Geowissenschaften

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Lutz Blumhagen

aus Berlin

1976

OBJEKTIVIERUNG UND OPTIMIERUNG DER ZEITSCHRITTWAHL BEI PROGNOSE-GLEICHUNGEN AM BEISPIEL EINES ÄQUIVALENT-BAROTROPEN MODELLS FÜR DIE NORD-HEMISPHÄRE

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Geowissenschaften

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Lutz Blumhagen

aus Berlin

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1.GUTACHTER: PROF.DR.R.GORENFLO
2.GUTACHTER: PROF.DR.K.HINKELMANN

TAG DER MUENDL.PRUEFUNG: 24.2.1976

Z u s a m m e n f a s s u n g

Bei der numerischen Lösung von Anfangs-Randwert-Problemen partieller Differentialgleichungen zur Wetterprognose von der Form

$$\{\mathfrak{D} + g(\phi)\}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = f(\phi)$$

$$\phi(t_0) = \phi_0 \quad , \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{Rand} = \phi_t$$

wobei $\mathfrak{D}$ ein linearer Differential-Operator in den räumlichen Variablen, $g(\phi)$ eine räumlich nahezu konstante Funktion, $\phi = \phi(x, y, t)$ die prognostische Variable und $f(\phi)$ eine Funktion von den räumlichen Ableitungen von ϕ darstellt, wird bzgl. der Zeit t in den Differentialgleichungen meist folgendermaßen diskretisiert

$$\left.\begin{aligned} \phi_{k+1} &= \phi_k + \Delta t \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_k \\ \text{bzw.} \quad \phi_{k+2} &= \phi_k + 2\,\Delta t \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{k+1} \end{aligned}\right\} \; k \geq 0$$

(Vorwärts- bzw. zentrale Differenzen). Dies entspricht zwar in der Diskretisierungsgenauigkeit der i.a. für $\mathfrak{D}$ und f verwendeten Vorschriften. Die Überlegung, die zur alternierenden Trennung von Zeit- und Ortsschritten führt, legt allerdings nahe, für den Zeitschritt durchaus genauere Approximationen zu verwenden, d.h. etwa die Anwendung des RUNGE-KUTTA-Verfahrens bzw. von RUNGE-KUTTA-FEHLBERG-Verfahren für die Prognose-Schritte. Die Verwendung dieser Verfahren liefert nicht nur eine Verbesserung in der Genauigkeit der Approximation, sondern zusätzlich die Möglichkeit einer automatischen Anpassung der Schrittweite Δt an die zum Zeitpunkt t vorliegenden Gegebenheiten. Es werden einerseits verschiedene Verfahren hinsichtlich ihrer Ökonomie miteinander verglichen *) und zum anderen einige in diesem Zusammenhang auftretende meteorologisch interessante Fragestellungen beantwortet.

*) Die Rechnungen wurden auf der CD Cyber 72 des Rechenzentrums (Arnimallee) der Freien Universität Berlin durchgeführt.

Häufig auftretende Symbole

ϕ	prognostisches Feld
z	Höhenfeld der gewählten Druckfläche (später 5oo mb)
z_g	Höhe des Erdbodens über NN in m
t	Zeit
t_o	Anfangszeitpunkt der Prognose
T	Prognosezeitraum
$\Delta t, \Delta t_k$	Zeitschritt
m	Maßstabsfaktor (stereographische Projektion)
x, y	horizontale kartesische Koordinaten
x_m, y_m	" " " in stereogr. Projektion
φ	geographische Breite
$\Delta x, S$	räumlicher Gitterpunktabstand
g	Erdbeschleunigung
f	Coriolisparameter
ζ	(geostrophische) Vorticity
ω	in den Bewegungsgleichungen Vertikalgeschwindigkeit im p-System bei Iterationsverfahren Overrelaxationsfaktor
∇	Gradient
$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$	LAPLACE - Differentialoperator
∇^2	LAPLACE - 4 - Punkte - Differenzenoperator
$J(\alpha,\beta) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x}$	JACOBI - Differentialoperator
J_4, J_8	JACOBI - 4 - bzw. - 8 - Punkte - Differenzenoperator

mit dem folgenden Zusammenhang von Differentialoperator / stereographischer Projektion / Differenzenoperator (vgl. dazu S. 25 - 28)

$$\nabla^2 = m^2 \nabla_m^2 \quad , \quad \nabla_m^2 \approx \frac{1}{S^2} \nabla^2$$

$$J = m^2 J_m \quad , \quad J_m \approx \frac{1}{4S^2} J_8$$

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
1. Zusammenstellung der theoretischen Grundlagen	3
2. Übertragung auf ein konkretes Problem	
a. Beispiel-Auswahl	2o
b. Gleichungsherleitung und -diskussion	21
c. Diskretisierung	25
d. Programmplanung	38
3. Ergebnisse durchgeführter Experimente	
a. Theoretische Auswertungsgrundlagen	42
b. Ergebnisse	44
c. Resumé	52
4. Ausblicke	53
Literaturverzeichnis	54
5. Anhang A : 5oo mb - Analysen - und - Prognosefelder	58
B : Überblick über den Programmablauf	64

Abkürzungen

A-Bed.	Anfangs-Bedingung
R-Bed.	Rand-Bedingung
A-W-P	Anfangswert-Problem
R-W-P	Randwert-Problem
A-R-P	Anfangs-Randwert-Problem
DGL	Differentialgleichung
gew. DGL	gewöhnliche DGL
part. DGL	partielle DGL
R-K-F	RUNGE - KUTTA - FEHLBERG
R-K	RUNGE - KUTTA
stat. Bew.	statistische Bewertung

Einleitung

Entwicklung von elektronischen Rechenanlagen und numerischer Wettervorhersage gehen Hand in Hand. Die verschiedenen Probleme der Wetterprognose (sowohl lokale wie großräumige Kurzfristvorhersage, als auch Mittelfrist- und klimatologische Langfristvorhersage und ähnliche Probleme) sind in ihrer mathematischen Grundaufgabe - Lösung eines Systems von part. DGLen im 3-dimensionalen Raum - so umfangreich, daß dabei auch die jeweils größte und schnellste Rechenanlage zu einschneidender Modellierung und zur Ökonomie der benutzten numerischen Näherungsverfahren zwingt. Es ist also von grundsätzlichem Interesse, mit möglichst geringem Rechenaufwand eine befriedigende Näherung für die exakte Lösung des vorgegebenen Problems zu erreichen, wobei sowohl der Prognosezeitraum T (z.B. 24-stündige Vorhersage) als auch die räumliche Gittermaschenweite Δx (in der Größenordnung durch den "Scale" des zugehörigen Problems bestimmt, im hier auftretenden Anwendungsbeispiel 381 km) vorgegeben sind. Die Rechenzeit für eine Prognose hängt dann im wesentlichen von zwei Faktoren ab:

i) Rechenaufwand für den einzelnen Zeitschritt ,

ii) Anzahl der benötigten Zeitschritte, d.h. Größe des Zeitintervalls Δt.

Ein Optimum liegt also bei einem Verfahren mit möglichst geringem Rechenaufwand pro Zeitschritt und gleichzeitig möglichst großem Δt, d.h. möglichst wenig Zeitschritten. Zusätzlich zu beachten ist die

iii) Komfortabilität des betrachteten Modells.

In dieser Arbeit werden Verfahren miteinander verglichen, die bei unterschiedlicher Genauigkeit in der Ordnung der Approximation bzgl. der Zeit t mit festem Zeitschritt Δt arbeiten,und solche, die den Zeitschritt laufend in seiner Größe korrigieren - angepaßt an das "Feldverhalten" zum aktuellen Prognosezeitpunkt $t = t_o + \sum \Delta t_k$ - ebenfalls bei unterschiedlicher Genauigkeit in der Ordnung hinsichtlich der Diskretisierung in t. Klar ist dabei, daß der Rechenaufwand pro Zeitschritt am gerinsten ist, je niedriger die Ordnung der Approximation ist und wenn keine Kontrolle über das Feldverhalten durchgeführt wird; jedoch ist auch andererseits zu erwarten, daß

bei der laufenden Kontrolle von Δt_k eine im Durchschnitt größere Schrittweite erreicht wird und ferner diese auch mit der Ordnung wächst, wobei bei letzterem Gesichtspunkt zu beachten ist, daß Δt_{max} durch Stabilitätsforderungen bei expliziten Verfahren in der verwendeten Art grundsätzlich eingeschränkt ist und sich daher beliebig hohe Ordnungen nicht "rentieren" (vgl. FEHLBERG (1969)).

In Teil 1 sind die theoretischen Grundlagen zusammengestellt mit dem Schwergewicht bei der Aufstellung der unterschiedlichen Verfahren hinsichtlich der Diskretisierung in der Zeit t ; entscheidend dafür sind die Arbeiten von FEHLBERG (1969 und 197o) und die Arbeit von WANNER (1969).

Ein konkretes meteorologisches Problem ist dann in Teil 2 aufgestellt - zwei Varianten eines gefilterten barotropen Modells für die Nordhemisphäre (THOMPSON (1961), HALTINER (1971)). Es werden die zugehörigen Modellgleichungen hergeleitet und diese in einem räumlichen Gitter diskretisiert *), wobei dann in 2^d die Programm- und Untersuchungsplanung zusammengestellt ist.

Die Ergebnisse sind in Teil 3 dargestellt und diskutiert. Neben dem Vergleich der verschiedenen Verfahren wird auch auf meteorologische Fragestellungen eingegangen, die in diesem Zusammenhang auftreten (z. B. FISCHER (197o), LORENZ (1963)) - nämlich unter dem Aspekt des oben erwähnten Punktes iii).

Ausblicke auf weitere Untersuchungsmöglichkeiten im Zusammenhang mit dem hier Erarbeiteten sind in Teil 4 angeschnitten.

Der Teil 5 enthält als Anhang A einige 5oo mb - Analysen (Anfangswert- und Prognose-Felder) und als Anhang B eine Übersicht über die zu dieser Arbeit erstellten FORTRAN-Programme.

---

*) Bezugspunkte sind hierbei im wesentlichen ARAKAWA (1966), COLLATZ (1964), MAINE (1967), MIYAKODA (196o a und b), SHELDON (1962).

1. Zusammenstellung der theoretischen Grundlagen

Zugrunde gelegt sei ein A-R-P part. DGLen *)

$$\left.\begin{array}{ll} \left\{ \mathfrak{D} + g(\phi) \right\} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = f(\phi) & \\ \text{A-Bed.} \qquad \phi(t_0) = \phi_e & \\ \text{R-Bed.} \qquad \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{\Gamma} = \phi_t & \end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

mit einem linearen Differentialoperator $\mathfrak{D}$ in den räumlichen Variablen $x \in \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^n$ zur "Prognostizierung" von $\phi = \phi(x,t)$ für $t \geq t_0$ im Gebiet $\mathcal{G}$ mit Rand$(\mathcal{G}) = \Gamma$ ($f(\phi)$: Funktion in den räumlichen Ableitungen bis zur 3-ten Ordnung von ϕ ; und $g(\phi)$: Funktion von $\nabla\nabla\phi$, die nur wenig von den Schwankungen von ϕ abhängt, d.h. $g(\phi)$ nahezu konstant).

Die numerische Lösung von (1.1) läuft sukzessiv folgendermaßen ab :

(a) Durch Diskretisierung von $\mathfrak{D}$ und den räumlichen Ableitungen in f und g in (1.1) wird ein "approximatives" $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ zum Zeitpunkt t_k ($\geq t_0$) bei bekanntem $\phi(t_k)$ bestimmt (als numerisches R-W-P part. DGLen / Over-Relaxationsverfahren).

(b) Mittels $\phi(t_k)$ und $\frac{\partial \phi}{\partial t}(t_k)$ liegen (formal) die diskretisierten Variablen eines A-W-P für ein System von gew. DGLen erster Ordnung

$$y' = f(t, y) \qquad (1.2)$$

vor, wobei f die Berechnungsvorschrift für $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ nach der Diskretisierung in x und den räumlichen Ableitungen in (1.1) bedeutet und die Vektoren y, y' die Diskretisierung von $\phi, \frac{\partial \phi}{\partial t}$ (in einem räumlichen Gitter für $\mathcal{G}$) angeben.

Gewöhnlich werden beim Schritt (b) Vorwärts- und zentrale Differenzen mit "geeigneten" Strategien gewählt, die hauptsächlich "numerischer Erfahrung" entspringen (bzw. Stabilitätsabschätzungen angenäherter linearisierter Probleme mit konstanten Koeffizienten, vgl. etwa GATES (1959)) :

---

*) Die hier abstrakte Formulierung des Problems wird in Teil 2 konkretisiert.

$$\left.\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \Delta t\,(y')_k \\ y_{k+2} &= y_k + 2\,\Delta t\,(y')_{k+1} \end{aligned}\right\} \quad \text{für } k \geq o \qquad (1.3)$$

*)

(z. B. die erste Gleichung für k = o , die zweite für k > o). Experimente (vgl. etwa BOLIN (1955) , MAINE (1967)) führen zu einem EULER-CAUCHY-Verfahren:

$$\left.\begin{aligned} y_{k+1/2} &= y_k + \frac{\Delta t}{2}\,(y')_k \qquad \text{für } k = o \\ y_{k+1} &= y_k + \Delta t\,(y')_{k+1/2} \\ y_{k+1/2} &= y_{k-1/2} + \Delta t\,(y')_k \qquad \text{für } k > o \end{aligned}\right\} \qquad (1.3')$$

An dieser Stelle wird in der vorliegenden Arbeit folgende Änderung vorgenommen. Die Diskretisierung (1.3) bzw. (1.3') in der Zeit t wird durch die Übertragung des R-K-Verfahrens (vgl. WANNER (1969, S. 89) ersetzt:

$$\left.\begin{aligned} y_I &= y_I + \Delta t \left\{ \sum_{\nu=1}^{k} c_\nu g_\nu \right\} \\ \text{mit} \quad g_\nu &= (y')_{t_I + a_\nu \Delta t,\; y_I + \Delta t \left(\sum_{x=1}^{\nu-1} b_{\nu x} g_x \right)} \end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$

Die klassische R-K-Formel hat die folgenden Koeffizienten:

ν \ x	a_ν	$b_{\nu x}$			c_ν
		1	2	3	
1	o				$1/6$
2	$1/2$	$1/2$			$1/3$
3	$1/2$	o	$1/2$		$1/3$
4	1	o	o	1	$1/6$

(1.5)

*) Es bedeutet k der Index für die Diskretisierung in t - Richtung :

$$y_k = y(t_o + k\Delta t)$$

D.h.

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= f(t_0, y_0) \\ g_2 &= f\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, y_0 + \frac{g_1 \Delta t}{2}\right) \\ g_3 &= f\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2}, y_0 + \frac{g_2 \Delta t}{2}\right) \\ g_4 &= f(t_0 + \Delta t, y_0 + g_3 \Delta t) \end{aligned}\right\} \quad (1.5')$$

liefert

$$y_1 = y_0 + \frac{\Delta t}{6}\left\{ g_1 + 2(g_2 + g_3) + g_4 \right\}$$

Dies liefert den folgenden (1.3) entsprechenden Berechnungsablauf zu (1.1):

$$\left.\begin{aligned} \phi_0 &\Rightarrow^{*)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_0 \\ \phi_{1/2} = \phi_0 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_0 \cdot \frac{\Delta t}{2} &\Rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{1/2(1)} \\ \phi_{1/2} = \phi_0 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{1/2(1)} \cdot \frac{\Delta t}{2} &\Rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{1/2(2)} \\ \phi_1 = \phi_0 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{1/2(2)} \cdot \Delta t &\Rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_1 \end{aligned}\right\} \quad (1.6)$$

$$\Rightarrow \quad \phi_1 = \phi_0 + \frac{\Delta t}{6}\left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_0 + 2\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{1/2(1)} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{1/2(2)} \right] + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_1 \right\}$$

*) $\Rightarrow$ heißt (hier und in den entsprechenden Berechnungsabläufen in 1.):

Berechnung über $\left\{ \mathfrak{D} + g(\phi_\nu) \right\} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_\nu = f(\phi_\nu)$

(hier $\nu = 0,\ 1/2(1),\ 1/2(2),\ 1$)

Die Wahl der Schrittweite Δt beruht häufig auf "numerischer Erfahrung", die etwa durch Vergleich von Ergebnissen mit verschiedenen Schrittweiten experimentell abgeschätzt wird oder aus Globalabschätzungen zugehöriger linearisierter Gleichungen mit konstanten Koeffizienten gewonnen wird, fußend auf teils mathematischen, teils physikalischen Abschätzungen zu Stabilität und Abbruchfehler (vgl. z.B. GATES (1959)).
Dies bringt jedoch immer die Unsicherheit mit sich, daß bei fest vorgegebenem Δt nie sicher ist, wie dicht die Lösung des A-W-P beispielsweise an Singularitäten herankommt, bei denen sich ein einmal gemachter Fehler "erheblich" verzinst (vgl. zur Fehler"verzinsung" etwa COLLATZ (1963) oder auch das FEHLBERG (197o) - Zitat: " Man muß weit unter angegebenen Globalschranken bleiben, um eine sinnvolle Genauigkeit zu erreichen.").
Das R-K-Verfahren bringt nun die Möglichkeit mit sich durch laufende Bestimmung der Stabilitätszahlen $\varkappa$ (vgl. etwa ZURMUEHL (1961) bzw. WANNER (1969)) zu überwachen, ob sich die Lösung solchen "Stellen" zu stark nähert. Bei konsequenter Verfolgung dieser Methode wird im Falle zu "hoher" $\varkappa$-Werte Δt verkleinert bzw. bei zu "kleinen" Δt vergrößert. Das Problem der Zeitschrittwahl läßt sich nach WANNER (1969) bei dieser Methode recht gut lösen (bei zentralen Differenzen bestehen die Schwierigkeiten in der Auffindung einer praktikablen Näherung für den laufenden Fehlerwert).
Prinzip von WANNER (1969, S. 128 ff):
Entlang den Lösungen wird versucht die Fehler R_i für jede Komponente i ungefähr gleich vorgegebenen Genauigkeitsanforderungen γ_i ($>o$) zu halten, d.h.

$$\eta = \max_i \frac{|R_i|}{\gamma_i} \qquad (1.7)$$

soll entlang den Lösungen ≈ 1 bleiben (das vielfach übliche Halbieren und Verdoppeln der Schrittweite ist ein etwas zu grobes Verfahren). Günstig ist folgende Arbeitsweise, die zu einer guten Automatisierung führt:

η wird nach (1.7) berechnet. Ist p die Ordnung des gewählten Verfahrens (bei R-K : p = 4), so ist η etwa proportional Δt^{p+1}, und eine neue bessere Schrittweite ergibt sich zu (vgl. auch GRIGORIEFF (1972, S. 61/2)) :

$$\Delta t_{neu} = \Delta t_{alt} \cdot \sqrt[p+1]{\frac{1}{\eta}} \qquad (1.8)$$

Ist η kleiner als eine Toleranzgrenze $\eta_2 (>1)$, so wird der letzte Schritt akzeptiert und Δt_{neu} für den nächsten Schritt benutzt. Im Falle $\eta \geq \eta_2$ wird der letzte Schritt mit Δt_{neu} wiederholt.
Falls η sehr klein oder gar Null wird (etwa bei einem Vorzeichenwechsel von R_i), kann dieses Verfahren zu unerwünschten Vergrößerungen der Schrittweite führen. Das läßt sich unterbinden durch die Vorgabe eines $\eta_1 < 1$ und die Ersetzung von (1.8) für $\eta < \eta_1$ durch

$$\Delta t_{neu} = \Delta t_{alt} \cdot \frac{p+2}{p+1} \left\{ 1 - \frac{1}{(p+2)\eta_1} \eta \right\} \cdot \sqrt[p+1]{\frac{1}{\eta_1}} \qquad (1.9)$$

Damit kann die Schrittweite höchstens um den Faktor $\frac{p+2}{p+1} \cdot \sqrt[p+1]{\frac{1}{\eta_1}}$ wachsen.
Zur praktischen Anwendung dieser Schrittweitensteuerung besteht die Wahl zwischen zwei Fehlergliedern für das R-K-Verfahren (1.5') : *)

1) Ein theoretisch herleitbares Näherungsfehlerglied (vgl. etwa ZURMUEHL (1961))

$$R = \max_i \left| \frac{g_3 - g_2}{g_2 - g_1} \right| \qquad (1.10)$$

*) Wobei vereinfachend die γ_i für alle i gleichgroß angesetzt werden, was in dem in 2. gewählten Anwendungsfall fürs erste gerechtfertigt erscheint (d.h. in keinem Punkt der Nord-Hemisphäre unterschiedliche Genauigkeitsanforderungen; hier ergeben sich in der Anwendung durchaus Variationsmöglichkeiten).

2) Ein für die Berechnungsstrategie einfacheres a priori Fehlerglied

$$R = \max_i \left| \frac{g_3 - g_2}{g_4 - g_1} \right| \qquad (1.11)$$

In Anlehnung an (1.8) wird

$$\Delta t_{neu} = \frac{\Delta t_{alt}}{\sqrt[5]{R * \beta}} \qquad (1.12)$$

bestimmt mit einer festen Forderung β *) für die gewünschte Genauigkeit. Mit zwei Toleranzgrenzen σ_1, σ_2 für die zugelassene Variabilität für Δt wird gefordert

$$\left.\begin{array}{l} \Delta t_{neu} \in \left(\Delta t_{alt}(1-\sigma_1),\ \Delta t_{alt}(1+\sigma_2) \right) \\ \text{anderenfalls folgt} \\ \text{a)} \quad \Delta t_{neu} > \Delta t_{alt}(1+\sigma_2) \\ \quad \text{liefert} \quad \Delta t_{neu} = \Delta t_{alt}(1+\sigma_2) \\ \quad \text{um ein zu starkes Anwachsen von } \Delta t \text{ zu vermeiden;} \\ \text{b)} \quad \Delta t_{neu} < \Delta t_{alt}(1-\sigma_1) \\ \quad \text{liefert Wiederholung des letzten Schrittes mit der reduzierten} \\ \quad \text{Schrittweite } \Delta t_{neu}. \end{array}\right\} (1.13)$$

Wird der Argumentation von FEHLBERG (1970) gefolgt, so ergibt sich eine weitere Variante von den üblichen Verfahren (R-K bzw. EULER-CAUCHY):

Der Einfluß der räumlichen Diskretisierung auf das Stabilitätsverhalten wurde schon erwähnt. Um zu R-K-Erfolgen zu kommen, ist ein möglichst niedriger Abbruchfehler nötig. Ferner zahlt sich eine hohe Ordnung nur

*) β ist ein "reziprokes" Fehlermaß.

dann aus, wenn dadurch die Wahl einer erheblich größeren Schrittweite erziehlt wird, was aber i.a. an Stabilitätsforderungen scheitert. Ein Einbau der Forderung nach einem niedrigen Abbruchfehler bei R-K-Verfahren verschiedener Ordnung wurde von FEHLBERG (1969), (197o) realisiert, wobei die Verfahren 1-ter, 2-ter und 3-ter Ordnung eine zusätzliche interessante Ökonomie im Berechnungsablauf mit sich bringen (beim Verfahren 4-ter Ordnung läßt sich diese zusätzliche Ökonomie nicht erreichen). Bei der vergleichenden Diskussion im Teil 3 wird dieser Punkt mit aufgegriffen. FEHLBERG (1969), (197o) macht zur Erreichung eines niedrigen Abbruchfehlers folgenden Ansatz

$$\left.\begin{aligned} y &= y_0 + \Delta t \sum_{\varkappa=1}^{n+1} c_\varkappa g_\varkappa + O(\Delta t^{n+1}) \\ \hat{y} &= y_0 + \Delta t \sum_{\varkappa=1}^{n+2} \hat{c}_\varkappa g_\varkappa + O(\Delta t^{n+2}) \end{aligned}\right\} \qquad (1.14)$$

mit $g_\varkappa$ entsprechend (1.4). Die im folgenden angeführten Lösungsverfahren wurden von FEHLBERG (1969) berechnet und werden im folgenden als R-K-F-Verfahren bezeichnet (n = 1, 2, 3, 4):

Die R-K-F-1(2)-Koeffizienten-Tabelle (vgl. FEHLBERG (1969), (197o))

$\varkappa$ \ λ	$a_\varkappa$	$b_{\varkappa\lambda}$ 1	$b_{\varkappa\lambda}$ 2	$c_\varkappa$	$\hat{c}_\varkappa$
1	o			$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{255}{256}$	$\frac{255}{256}$
3	1	$\frac{1}{256}$	$\frac{255}{256}$		$\frac{1}{512}$

(1.15)

führt zu folgendem Näherungswert TE *) für den Abbruchfehler

$$TE = \frac{\Delta t}{512}(g_1 - g_3)$$

*) Truncation Error

D.h. also

$$
\left.
\begin{aligned}
g_1 &= f(t_0, y_0) \\
g_2 &= f\left(t_0 + \tfrac{\Delta t}{2},\ y_0 + \tfrac{\Delta t}{2} g_1\right) \\
g_3 &= f\Big(t_0 + \Delta t,\ \underbrace{y_0 + \tfrac{\Delta t}{256} g_1 + \tfrac{255\,\Delta t}{256} g_2}_{= y_1}\Big) \\
TE &= \mathrm{Max}\,|g_1 - g_3| * \frac{\Delta t}{512} \\
\Delta t_{neu} &= \frac{\Delta t_{alt}}{\sqrt{TE * \beta}} \quad {}^{*)} \qquad ;\ g_3 \to g_1\,,\ y_1 \to y_0
\end{aligned}
\right\} \quad (1.15')
$$

Somit entsteht folgender (1.6) entsprechender Ablauf:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\phi_0 \Rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_0 \\
&\phi_{1/2} = \phi_0 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_0 \cdot \frac{\Delta t}{2} \Rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{1/2} \\
&\phi_1 = \phi_0 + \frac{\Delta t}{256}\left\{\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_0 + 255\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{1/2}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_1 \\
&TE = \mathrm{Max}\left|\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_0 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_1\right| * \frac{\Delta t}{512} \\
&\Delta t_{neu} = \frac{\Delta t_{alt}}{\sqrt{TE * \beta}} \qquad \text{mit Nebenbedingung (1.13)} \\
&\phi_1 \to \phi_0\,,\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_1 \to \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_0
\end{aligned}
\right\} \quad \begin{matrix}(1.16) \\ \text{RKF 1(2)}\end{matrix}
$$

*) nämlich Verfahren 1-ter Ordnung

Die R-K-F-2(3)-Koeffizienten-Tabelle (vgl. FEHLBERG (1969), (197o))

ν / $\varkappa$	$a_\varkappa$	$b_{\varkappa\nu}$			$c'_\varkappa$	$\hat{c}_\varkappa$
		1	2	3		
1	0				$\frac{214}{891}$	$\frac{533}{2106}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{33}$	0
3	$\frac{27}{40}$	$-\frac{189}{800}$	$\frac{729}{800}$		$\frac{650}{891}$	$\frac{800}{1.053}$
4	1	$\frac{214}{891}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{650}{891}$		$-\frac{1}{78}$

(1.17)

liefert

$$TE = \Delta t \left\{ -\frac{23}{1782}\, g_1 + \frac{1}{33}\, g_2 - \frac{350}{11583}\, g_3 + \frac{1}{78}\, g_4 \right\}$$

Daraus entsteht der folgende Verfahrensablauf:

$$\phi_0 \Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0$$

$$\phi_{1/4} = \phi_0 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 \cdot \frac{\Delta t}{4} \Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{1/4}$$

$$\phi_{\frac{27}{40}} = \phi_0 + \frac{\Delta t}{800}\left\{-189\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 + 729\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{1/4}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{\frac{27}{40}}$$

$$\phi_1 = \phi_0 + \frac{\Delta t}{891}\left\{214\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 + 27\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{1/4} + 650\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{\frac{27}{40}}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_1$$

$$TE = Max\left| -\frac{23}{1782}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 + \frac{1}{33}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{1/4} - \frac{350}{11583}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{\frac{27}{40}} + \frac{1}{78}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_1 \right| * \Delta t$$

(1.18) RKF2(3)

$$\Delta t_{neu} = \frac{\Delta t_{alt}}{\sqrt[3]{TE * \beta}}$$ mit Nebenbedingung (1.13)

$$\phi_1 \rightarrow \phi_0 \quad , \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_1 \longrightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0$$

Es ergeben sich zwei verschiedene R-K-F-3(4)-Koeffizienten-Tabellen (vgl. FEHLBERG (1969)), wobei das Fehlerglied zu (1.19) gering besser als das zu (1.2o) erscheint, was im Teil 3 beim numerischen Vergleich überprüft wird.

x \ λ	a_x	$b_{x\lambda}$				c_x	$\hat{c}_x$
		1	2	3	4		
1	0					$\frac{79}{490}$	$\frac{229}{1470}$
2	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$				0	0
3	$\frac{7}{15}$	$\frac{77}{900}$	$\frac{344}{900}$			$\frac{2175}{3626}$	$\frac{1125}{1813}$
4	$\frac{35}{38}$	$\frac{805}{1444}$	$-\frac{77175}{54872}$	$\frac{97125}{54872}$		$\frac{2166}{9065}$	$\frac{13718}{81585}$
5	1	$\frac{79}{490}$	0	$\frac{2175}{3626}$	$\frac{2166}{9065}$		$\frac{1}{18}$

(1.19)

mit $$TE = \Delta t \left\{ \frac{4}{735} g_1 - \frac{75}{3626} g_3 + \frac{5776}{81585} g_4 - \frac{1}{18} g_5 \right\}$$

x \ λ	a_x	$b_{x\lambda}$				c_x	$\hat{c}_x$
		1	2	3	4		
1	0					$\frac{1}{6}$	$\frac{43}{288}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$				0	0
3	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{32}{81}$			$\frac{27}{52}$	$\frac{243}{416}$
4	$\frac{6}{7}$	$\frac{47}{98}$	$-\frac{432}{343}$	$\frac{1053}{686}$		$\frac{49}{156}$	$\frac{343}{1872}$
5	1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{27}{52}$	$\frac{49}{156}$		$\frac{1}{12}$

(1.2o)

mit $$TE = \Delta t \left\{ \frac{5}{288} g_1 - \frac{27}{416} g_3 + \frac{245}{1872} g_4 - \frac{1}{12} g_5 \right\}$$

Die zugehörigen Verfahrensabläufe haben somit die Form:

$$\phi_0 \Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0$$

$$\phi_{1/2} = \phi_0 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 \cdot \frac{1}{2}\Delta t \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{1/2}$$

$$\phi_{2/15} = \phi_0 + \frac{\Delta t}{900}\left\{77\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 + 343\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{1/2}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{2/15}$$

$$\phi_{31/38} = \phi_0 + \frac{\Delta t}{54872}\left\{30514\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 - 77175\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{1/2} + 97125\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{2/15}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{31/38}$$

$$\phi_1 = \phi_0 + \Delta t\left\{\frac{29}{490}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 + \frac{2197}{3626}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{2/15} + \frac{2166}{9065}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{31/38}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_1$$

$$TE = Max\left|\frac{4}{735}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 - \frac{27}{3626}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{2/15} + \frac{5776}{81585}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{31/38} - \frac{1}{18}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_1\right| * \Delta t$$

$$\Delta t_{neu} = \frac{\Delta t_{alt}}{\sqrt[4]{TE * \beta}} \qquad \text{mit Nebenbedingung (1.13)}$$

$$\phi_1 \rightarrow \phi_0 \quad , \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_1 \rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0$$

(1.21) RKF3(4)$_a$

bzw.

$$\phi_0 \Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0$$

$$\phi_{1/4} = \phi_0 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 \cdot \frac{\Delta t}{4} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{1/4}$$

$$\phi_{4/9} = \phi_0 + \frac{\Delta t}{81}\left\{4\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 + 32\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{1/4}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{4/9}$$

$$\phi_{1/2} = \phi_0 + \frac{\Delta t}{686}\left\{339\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 - 864\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{1/4} + 1053\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{4/9}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{1/2}$$

$$\phi_1 = \phi_0 + \frac{\Delta t}{156}\left\{26\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 + 81\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{4/9} + 49\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{1/2}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_1$$

$$TE = Max\left|\frac{5}{288}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 - \frac{27}{416}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{4/9} + \frac{245}{1872}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{1/2} - \frac{1}{12}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_1\right| * \Delta t$$

$$\Delta t_{neu} = \frac{\Delta t_{alt}}{\sqrt[4]{TE * \beta}} \qquad \text{mit Nebenbedingung (1.13)}$$

$$\phi_1 \rightarrow \phi_0 \quad , \quad \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_1 \rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0$$

(1.22) RKF3(4)$_b$

Die R-K-F-4(5)-Koeffizienten-Tabelle (vgl. FEHLBERG (1969), (197o))

λ / $\varkappa$	$a_\varkappa$	$b_{\varkappa\lambda}$					$c_\varkappa$	$\hat{c}_\varkappa$
		1	2	3	4	5		
1	o						$\frac{25}{216}$	$\frac{16}{135}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$					o	o
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$				$\frac{1406}{2565}$	$\frac{6656}{12825}$
4	$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$			$\frac{2197}{4104}$	$\frac{28561}{56430}$
5	1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$		$-\frac{1}{5}$	$-\frac{9}{50}$
6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$		$\frac{2}{55}$

(1.23)

mit

$$TE = \Delta t \left\{ -\frac{1}{360} g_1 + \frac{128}{4275} g_3 + \frac{2197}{75240} g_4 - \frac{1}{50} g_5 - \frac{2}{55} g_6 \right\}$$

liefert eine zusätzliche Aufwandserhöhung gegenüber den Verfahren niedrigerer Ordnung, da der letzte Schritt nicht als Ausgangsschritt für den nächsten Durchlauf verwendbar ist, wie es bei den angegebenen Verfahren niedrigerer Ordnung der Fall war. Die Tabelle (1.23) führt zu folgendem Ablaufschema:

$\phi_0 \overset{*)}{\Rightarrow} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0$

$\phi_{1/4} = \phi_0 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 \cdot \frac{\Delta t}{4} \Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{1/4}$

$\phi_{3/8} = \phi_0 + \frac{\Delta t}{32}\left\{3\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 + 9\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{1/4}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{3/8}$

$\phi_{12/13} = \phi_0 + \frac{\Delta t}{2197}\left\{1932\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 - 7200\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{1/4} + 7296\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{3/8}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{12/13}$

$\phi_1 = \phi_0 + \frac{\Delta t}{4104}\left\{8341\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 - 32832\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{1/4} + 29440\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{3/8} - 845\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{12/13}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_1$

$\phi_{1/2} = \phi_0 + \Delta t\left\{-\frac{8}{27}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{1/4} - \frac{3544}{2565}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{3/8} + \frac{1859}{4104}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{12/13} - \frac{11}{40}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_1\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{1/2}$

(1.24) RKF4(5)

$TE = Max\left|-\frac{1}{360}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 + \frac{128}{4275}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{3/8} + \frac{2197}{75240}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{12/13} - \frac{1}{50}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_1 - \frac{2}{55}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{1/2}\right| * \Delta t$

$\Delta t_{neu} = \frac{\Delta t_{alt}}{\sqrt[5]{TE * \beta}}$ mit Nebenbedingung (1.13)

$\phi_1 = \phi_0 + \Delta t\left\{\frac{25}{216}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_0 + \frac{1406}{2565}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{3/8} + \frac{2197}{4104}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{12/13} - \frac{1}{5}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_1\right\}$

$\phi_1 \rightarrow \phi_0$ *)

*) Als Anfangs $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{00}$ für die Overrelaxation ist möglicherweise g_5 besser geeignet als g_6.

Als Vergleich zu den Verfahren 3-ter Ordnung wird noch das klassische Verfahren von KUTTA herangezogen (vgl. FEHLBERG (1969)), das nicht die Ökonomie-Forderung zum Abbruchfehler der RKF3(4)-Verfahren erfüllt, aber sonst weniger aufwendig erscheint *) und daher einen interessanten Vergleich zwischen klassischen und den vom Abbruchfehler her günstigeren FEHLBERG-Verfahren niedrigerer Ordnung erlaubt. Die Koeffizienten-Tabelle zum KUTTA-Verfahren hat die Form

x \ λ	a_x	$b_{x\lambda}$		c_x
		1	2	
1	0			$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$
3	1	-1	2	$\frac{1}{6}$

(1.25)

Nötig ist nun noch die Entwicklung eines ad-hoc-Fehlergliedes; dazu wird aus der zu (1.25) äquivalenten Form

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= f(t_0, y_0) \\ g_2 &= f\left(t_0 + \frac{\Delta t}{2},\ y_0 + \frac{\Delta t}{2} g_1\right) \\ g_3 &= f(t_0 + \Delta t,\ y_0 - \Delta t\, g_1 + 2\Delta t\, g_2) \\ y_1 &= y_0 + \frac{\Delta t}{6}\{g_1 + 4 g_2 + g_3\} \end{aligned}\right\} \qquad (1.25')$$

der Ausdruck

$$FG \approx \frac{|g_{3\,alt} - g_{3\,neu}|}{|g_{2\,alt} - g_{3\,alt}|} \qquad (1.26)$$

gebildet.

*) Die Kontrollrechnung soll ohne den bei den RKF3(4)-Verfahren notwendigen 4-ten Overrelaxationsschritt durch ein ad-hoc-Fehlerglied bewerkstelligt werden.

Die Realisierung von (1.25) mit Kontrollrechnung nach (1.26) führt zu folgendem Ablaufschema :

$$\longrightarrow \quad \phi_0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_0$$

$$\Delta t_{neu} = \frac{\Delta t_{alt}}{\sqrt[k]{FG * \beta}} \qquad \text{für} \quad k \geqslant 1$$

mit FG nach (1.26) unter der Nebenbedingung (1.13) *)

$$\phi_{1/2} = \phi_0 + \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{1/2}$$

$$\phi_1 = \phi_0 + \Delta t \left\{ -\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{1/2} \right\} \quad \Longrightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_1$$

$$\phi_1 = \phi_0 + \frac{\Delta t}{6}\left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_0 + 4\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{1/2} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_1 \right\}$$

$$\phi_1 \longrightarrow \phi_0$$

(1.27)

Mittels der vorgenommenen Kombination der R-K-F-Verfahren mit der Schrittweitensteuerung nach WANNER ist zu hoffen, daß die automatische Kontrolle des Abbruchfehlers auch die Stabilität mitkontrolliert und ein unerlaubtes Anwachsen von Δt auf diese Weise verhindert wird. Zusätzlich haben die Verfahren mit varialem Δt den Vorteil, nicht der Einschränkung von S. 6 zu unterliegen (FEHLBERG (197o)), daß man bei festem Δt weit unter angegebenen Globalschranken bleiben muß, um eine sinnvolle Genauigkeit zu erreichen.

*) Bei Benutzung von (1.26) wird die neue Schrittweite erst dann bestimmt, wenn $\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_0$ schon berechnet ist, also vor der Bestimmung von $\phi_{1/2}$. Dieses liefert gerade eine zusätzliche Overrelaxation, wenn eine Wiederholung des Zeitschritts nötig wird.

Zusammenfassend ergibt sich folgende Palette von zu vergleichenden Verfahren :

Verfahren	zug. Formeln	Unterprogramm	Schlüssel
Vorw. & zentr. Diffzen.	(1.3)	PRED 11	DIFF
EULER - CAUCHY	(1.3´)	12	ECBM
R-K-Verfahren	(1.6)	14	RK
R-K-Verf. mit Fehlerglied	(1.6), (1.11)	21	PRAK
	(1.6), (1.10)	22	THEO
KUTTA-Verf.	(1.27), (1.26)	23	K3/A
R-K-F-Verfahren	(1.16)	31	A1/2
"	(1.18)	32	A2/3
"	(1.21)	33	A3/4
"	(1.22)	43	B3/4
"	(1.24)	34	A4/5

Dabei arbeiten die drei ersten Verfahren mit fest vorgegebenem Δt, die restlichen acht mit automatisch variierendem Δt.

Es bleibt noch zu erwähnen, wie unerwünschte Aufrauheffekte (vgl. HINKELMANN (1951)) vermieden werden. Bei der räumlichen Diskretisierung zur Realisierung des ersten Schrittes (a) (s.S.3) zur Lösung von (1.1) stellt sich im Zusammenhang mit der zeitlichen Integration nämlich das Problem der Beseitigung des spektralen Energiestaus. Diese Erscheinung ist wie folgt zu verstehen :

1) die räumliche Diskretisierung bedingt das Auftreten einer Grenzwellenzahl und demgemäß ein Abschneiden innerhalb des Energiespektrums (vgl. RICHTMYER (1962)),
2) die nichtlinearen Wechselwirkungen (vgl. ARAKAWA (1966)) verursachen in diesem Teil des Spektrums einen kaskadenartigen Energietransfer hin zu hohen Wellenzahlen (vgl. RICHTMYER (1962)).

Zur Vermeidung dieser Erscheinung gibt es generell zwei verschiedene Möglichkeiten :

i) Ein sog. Filter-NAVIER-STOKES-Term $\nabla \cdot \nu \nabla \vec{v}$ (vgl. EDELMANN/ REISER (1961)) wird dem DGLs-System additiv hinzugefügt;

ii) von "Zeit zu Zeit" wird ein Filter-Operator über das ϕ-Feld geschoben (vgl. WALLINGTON (1962), BLECK (1965)), d.h. bestimmte wellenförmige Erscheinungen werden durch die Bildung entsprechender Flächenmittelwerte herausgefiltert.

In dieser Arbeit wird der folgende von BLECK (1965, S. 52) hergeleitete und erprobte Filter benutzt (optimaler zweidimensionaler isotroper Tiefpaßfilter, vgl. FORTAK (1967, S. 112)) :

$$\left.\begin{array}{lll} 0.279372 & 0.171943 & -0.006918 \\ & 0.077458 & -0.024693 \\ & & -0.012940 \end{array}\right\} \qquad (1.28)$$

Die beiden im zeitlichen Ablauf auftretenden subjektiven Entscheidungen

1) nach wieviel Schritten wird gefiltert,
2) welcher Zeitschritt wird gewählt

werden in dieser Arbeit objektiviert :

1) Die Filterungen werden vom Modell gesteuert (in irgend einer Form geschieht das auch bei MAINE (1967)), indem gewisse Schranken für den Gradienten von ϕ vorgegeben werden.
2) Es sind andere Verfahren ausgewählt, die automatisch den Zeitschritt aus dem jeweiligen Feldverhalten über die Abschätzung des "aktuellen Fehlergliedes" bestimmen.

In Teil 3 sind "Aufwand" und "Gewinn" miteinander verglichen.

2. Übertragung auf ein konkretes Problem *)

a. Beispiel-Auswahl (äquivalent-barotropes Modell zur Wetterprognose)

Das Beispiel soll überschaubar bleiben, aber nichtlinear. Denn sind die Nichtlinearitäten wetterwirksam, so muß gerade an den nichtlinearen Modellen der Erfolg oder Mißerfolg eines Lösungsverfahrens getestet werden. Ferner muß der Test wegen der Nichtlinearitäten mit aktuellen Daten durchgeführt werden, da Superposition von Lösungen bei nichtlinearen Problemen nicht in Frage kommt (vgl. z.B. AMES (1965, S.3)).
Aus diesem Grunde wird auf äquivalent-barotrope Modelle zur Wetterprognose zurückgegriffen, wie sie bei HALTINER (1971) und bei THOMPSON (1961) zu finden sind. Nach HALTINER (1971, S.118) liefern diese Modelle trotz ihrer tiefgreifenden physikalischen Vereinfachungen **) verblüffend gute Ergebnisse. Es werden zwei leicht unterschiedliche Approximationen betrachtet. Das einfachere Modell geht auf HALTINER (1971) zurück und wird bei EDELMANN (1973) zitiert; es ist von der Form

$$(\mathcal{D} + c)\frac{\partial \phi}{\partial t} = f(\phi) \qquad (2.1)$$

mit konstantem c . Das andere Modell geht auf THOMPSON (1961) zurück und hat die Form

$$(\mathcal{D} + g(\phi))\frac{\partial \phi}{\partial t} = f(\phi) \qquad (2.2)$$

wobei die Nichtlinearität $g(\phi)$ durch einen Operator gegeben ist, auf dessen Wert die Schwankungen von ϕ nur geringen Einfluß haben (vgl. THOMPSON (1961, S. 94)). Bei HALTINER (1971) führt dies zur Approximation durch eine Konstante c.

---

*) D.h. Realisierung von Punkt 1.(a).

**) Zu den physikalischen Folgen der "Barotropie" - Annahme vgl. etwa HINKELMANN/KORB (1973) und HINKELMANN/REISER (1973).

Es steht ϕ für die Höhe der 500 mb - Fläche. Auf entsprechende Stromlinienmodelle (mit ψ für ϕ / vgl. etwa EDELMANN (1973) oder BOLIN (1955), (1956)) wird nicht zurückgegriffen wegen der zusätzlich notwendigen Lösung der Balance-Gleichung nach ψ zur Erzeugung des Stromlinienfeldes (zu den auftretenden Schwierigkeiten vgl. etwa BOLIN (1955)). Die Daten für ϕ liegen als Höhenlinienkarten der 500 mb - Fläche täglich vor.

b. Gleichungsherleitung und -diskussion

Die vollständigen Gleichungen im p-System ohne Reibungsterm (vgl. THOMPSON (1961, S. 36))

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial v_h}{\partial t}\right)_p + u\left(\frac{\partial v_h}{\partial x}\right)_p + v\left(\frac{\partial v_h}{\partial y}\right)_p + \omega\frac{\partial v_h}{\partial p} + k\times f v + g\nabla_p z = 0\\
&\nabla_p \cdot v_h + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0\\
&\left(\frac{\partial \theta}{\partial t}\right)_p + v_h\cdot\nabla_p\theta + \omega\frac{\partial\theta}{\partial p} = 0\\
&\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{\rho g}\\
&p = \rho R T\\
&\theta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\varkappa}
\end{aligned}\right\} \quad (2.3)$$

liefern durch Anwendung des Operators $k\cdot\nabla_p\times$ auf die Bewegungsgleichung (2.3.1) die skalare Vorticity-Gleichung (mit $\zeta = k\cdot\nabla\times v_h$ / vgl. HALTINER (1971, S. 8))

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + v_h\cdot\nabla_p(\zeta+f) + \omega\frac{\partial\zeta}{\partial p} + (\zeta+f)\nabla_p\cdot v_h + k\cdot\nabla_p\omega\times\frac{\partial v_h}{\partial p} = 0 \quad (2.4)$$

Hierin ist v_h der horizontale Windvektor, ω die Vertikalgeschwindigkeit, p der Druck, k der Einheitsvektor in z-Richtung, ζ die Vorticity und f der Coriolisparameter.

Ein Vergleich der Größenordnungen der einzelnen Glieder führt nach HALTINER (1971, S. 59) unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung (2.3.2) und der Ersetzung des Coriolisparameters durch einen konstanten mittleren Wert f_o zu

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_h \cdot \nabla_h (\zeta + f) = f_o \frac{\partial \omega}{\partial p} \qquad (2.5)$$

Die Gleichung (2.5) wird auch bei EDELMANN (1973) benutzt. Mit der Abschwächung der Barotropie-Annahme $\frac{\partial v_h}{\partial z} = 0$ in die äquivalent-barotrope Form (Richtungsänderung mit der Höhe gleich Null / Geschwindigkeitsänderung mit der Höhe ungleich Null), d.h.

$$\left.\begin{aligned} v_h(p) &= A(p)\,\overline{v_h} \\ \zeta(p) &= A(p)\,\overline{\zeta} \end{aligned}\right\}^{*)} \qquad (2.6)$$

also

ergibt sich (vgl. HALTINER (1971), EDELMANN (1973)):

$$\frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial t} + \overline{A^2}\,\overline{v_h} \cdot \nabla_h \overline{\zeta} + \overline{v_h} \cdot \nabla_h f = \frac{f_o\,\omega_g}{p_o} \qquad (2.7^a)$$

Dabei ist in (2.6) $\overline{A} = 1$ zu normieren; die Empirie liefert, daß A vom Boden zur Höhe hin zunimmt und bei 600 mb ungefähr 1 ist (vgl. HALTINER (1971), EDELMANN (1973)).

THOMPSON (1961, S. 86) approximiert ähnlich zu

$$\frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial t} + \overline{A^2}\,\overline{v_h} \cdot \nabla_h \overline{\zeta} + \overline{v_h} \cdot \nabla_h f - \frac{\omega_g}{p_o}\left(\overline{A^2}\,\overline{\zeta} + f\right) = 0 \qquad (2.7^b)$$

ω_g ist die Vertikalgeschwindigkeit an der Untergrenze. Auf den Unterschied zwischen (2.7^a) und (2.7^b) wird später noch eingegangen.

---

*) Der Querstrich bedeutet die Bildung des integralen Mittelwertes

$$\overline{(\ldots)} = \frac{1}{p_o} \int_0^{p_o} (\ldots)\, dp$$

Mit $\mathbb{V}^* = \overline{A^2}\,\overline{\mathbb{V}}$ und $v = v^*$ [+)] für die entsprechend gewählte Druckfläche ("äquivalent-barotropes Niveau") folgt (vgl. EDELMANN (1973))

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbb{V}\cdot\nabla(\zeta+f) - \frac{\overline{A^2}\,\omega_g}{\rho_0}(\zeta+f) = 0 \qquad (2.8^b)$$

bzw.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbb{V}\cdot\nabla(\zeta+f) = \frac{\overline{A^2}\,\omega_g f_0}{\rho_0} \qquad (2.8^a)$$

Für ω_g wird

$$w = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \mathbb{V}_h\cdot\nabla_h z + \omega\frac{\partial z}{\partial p}$$

nach ω aufgelöst, wobei zu beachten ist, daß $\mathbb{V}_h\cdot\nabla_h z = 0$ bei geostrophischer Approximation gilt und $\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{1}{g\rho}$ nach der hydrostatischen Grundgleichung (2.3.4), d.h.

$$\omega = g\rho\left(\frac{\partial z}{\partial t} - w\right)$$

Wegen der Undurchdringlichkeit des Erdbodens für Luft gilt an der Erdoberfläche, d.h. für $z = z_g(x,y)$, (vgl. THOMPSON (1961))

$$w_g = \mathbb{V}_0\cdot\nabla_h z_g$$

und somit für die Vertikalgeschwindigkeit am Boden

$$\omega_g = g\rho\left(\frac{\partial z_0}{\partial t} - \mathbb{V}_0\cdot\nabla_h z_g\right) \qquad (2.9)$$

Die geostrophische Approximation (vgl. THOMPSON (1961))

$$u = -\frac{g}{f}\frac{\partial z}{\partial y}\,, \quad v = \frac{g}{f}\frac{\partial z}{\partial x}\,, \quad \zeta \approx \frac{g}{f}\nabla^2 z$$

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} = \frac{A_0}{\overline{A^2}}\frac{\partial z}{\partial t}\,, \quad \mathbb{V}_g = \frac{A_0\,g}{\overline{A^2}\,f}\,\mathbb{k}\times\nabla z$$

[+)] Vektoren bedeuten von jetzt an nur noch (x,y)-Richtung, d.h. die Indizierung h für Horizontalkomponente wird fortgelassen, da im folgenden keine Verwechslungen vorkommen können.

liefert schließlich mit (2.8^b) und (2.9) die Modellgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 z + J(z, \frac{g}{f}\nabla^2 z + f) = \frac{A_0 f}{R T_0}\left(\frac{g}{f}\nabla^2 z + f\right)\left[\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{g}{f} J(z, z_g)\right]$$

oder

$$(\nabla^2 - \mu^2)\frac{\partial z}{\partial t} = -J(z, S+f) - \frac{g\mu^2}{f} J(z, z_g) \qquad (2.1o^b)$$

mit $\mu^2 = \frac{A_0 f}{R T_0}(S+f)$, $S = \frac{g}{f}\nabla^2 z$

Genauso gilt bei der Approximation von HALTINER (1971) in μ^2 $(S+f \rightarrow f_0)$ die entsprechende Modellgleichung

$$(\nabla^2 - M)\frac{\partial z}{\partial t} = -J(z, S+f) - \frac{Mg}{f} J(z, z_g) \qquad (2.1o^a)$$

mit $M = \frac{f_0^2 \rho_0 A_0}{p_0}$, $S = \frac{g}{f}\nabla^2 z$

Unter Berücksichtigung von (2.3.5) $p_0 = \rho_0 R T_0$ ergibt sich die Approximation

$$S+f \longrightarrow f_0 \quad ,$$

die von (2.1o^b) zu (2.1o^a) führt. Die Erklärung hierzu findet sich bei THOMPSON (1961, S. 94): "Es ist $\mu^2 \sim S+f$ und wird bei Abschätzungen als "hinreichend konstant" angesehen, weil S der Größe nach unterhalb von f liegt". Somit sind also nur Ableitungen von $S+f$ von entscheidender Bedeutung.

c. Diskretisierung von (2.1o)

Zur numerischen Behandlung der Modelle (2.1o) wird als Geltungsbereich der DGLen die Nordhemisphäre bis in die Gegend von φ gleich 1o° bis 15° nördlicher Breite gewählt. Die Kugelfläche der Erde wird durch die lokal winkeltreue stereographische Projektion in eine Ebene abgebildet (Abb. 1 / vgl. HOLLMANN (1959)), auf der dann zur Diskretisierung von (2.1o) in endliche Differenzengleichungen ein äquidistantes quadratisches Gitternetz eingeführt wird. Zur Übertragung der hemisphärischen Gleichungen in die Projektionsebene wird davon Gebrauch gemacht, daß LAPLACE - und JACOBI - Operator unter der stereographischen Projektion invariant sind (vgl. HOLLMANN (1959)), d.h.

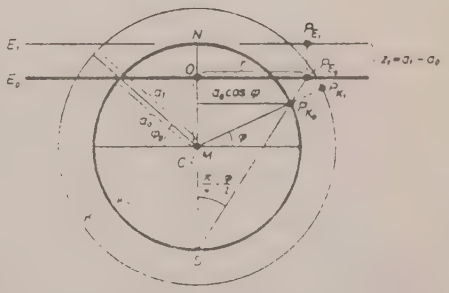


Abb. 1 : zur stereographischen Projektion

$$\nabla^2 \alpha = m^2 \nabla_m^2 \alpha \quad , \quad \mathcal{J}(\alpha,\beta) = m^2 \mathcal{J}_m(\alpha,\beta) \qquad (2.11)$$

wobei der "Maßstabsfaktor" m die Entfernungsverzerrung zwischen Abständen in der Projektionsebene und solchen auf der Kugel angibt. Es gilt:

$$m = \frac{1+\sin\varphi_0}{1+\sin\varphi} \qquad (2.12)$$

Die geographischen Breiten φ für die einzelnen Gitterpunkte werden über das Programm STEPRO des Verfassers bestimmt *).

*) Das Programm ist im Anhang abgedruckt.

Unter Berücksichtigung von (2.11) folgt aus (2.1o^b) die neue Modellgleichung

$$\left.\begin{aligned} &(\nabla_m^2 - \mu^2)\frac{\partial z}{\partial t} = -\mathcal{J}_m(z, \mathcal{S}+f) - \frac{g m^2 \mu^2}{f}\mathcal{J}_m(z, z_g) \\ &\text{mit} \quad \mu^2 = \frac{A_o f}{m^2 R T_o}(\mathcal{S}+f) \quad , \quad \mathcal{S} = \frac{m^2}{f} g \nabla_m^2 z \end{aligned}\right\} \quad (2.13^b)$$

Bzgl. der abstrakten Formulierung in (1.1) ist jetzt konkret

ϕ : z , die Höhe der gewählten Druckfläche

$\mathcal{D}$: ∇_m^2

$g(\phi)$: $\begin{cases} -\mu^2(\nabla^2 z) & \text{in } (2.13^b) \\ -M = -\frac{f_o^2 A_o \rho_o}{m^2 p_o} < 0 \; ^{*)} & \text{im HALTINER-Modell} \end{cases}$

$f(\phi)$: $-\mathcal{J}_m(z, \mathcal{S}+f) - \frac{m^2}{f} g'' g(\phi)'' \mathcal{J}_m(z, z_g)$

Als nächster Schritt folgt die Diskretisierung der Differentialoperatoren ∇_m^2 und $\mathcal{J}_m$. Unter Zugrundelegung des abgebildeten Gitters (Abb. 2) mit

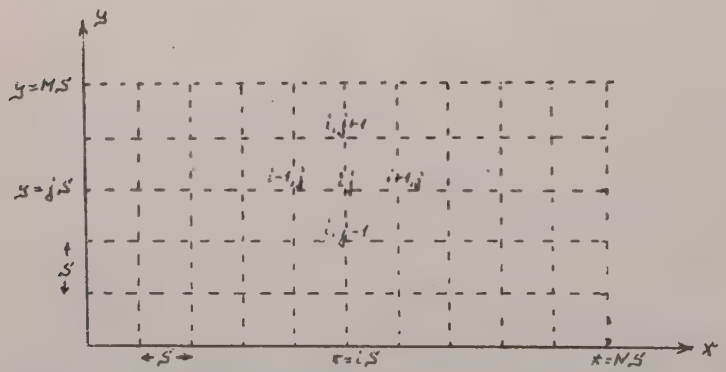


Abb. 2 : Gitternetz und Bezeichnung der Gitterpunkte (in der horizontalen (x,y)-Ebene)

*) Nach der Umwandlung durch die stereographische Projektion ist M durch den auftretenden Maßstabsfaktor nicht mehr unabhängig vom Ort, sondern nur noch von der Zeit.

der Maschenweite S werden gewöhnlich die folgenden Differenzen-Approximationen gewählt:

$$\left.\begin{aligned} \nabla_m^2 \alpha &= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y_m^2} \\ &\approx \frac{1}{S^2}\left(\alpha_{i+1,j} + \alpha_{i-1,j} + \alpha_{i,j+1} + \alpha_{i,j-1} - 4\alpha_{i,j}\right) \\ &:= \frac{1}{S^2}\nabla^2 \alpha \end{aligned}\right\} \quad (2.14)$$

$$\left.\begin{aligned} J_m(\alpha,\beta) &= \frac{\partial \alpha}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial y_m} - \frac{\partial \alpha}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x_m} \\ &\approx \frac{1}{4S^2}\left\{(\alpha_{i+1,j} - \alpha_{i-1,j})(\beta_{i,j+1} - \beta_{i,j-1})\right. \\ &\qquad \left. - (\alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j-1})(\beta_{i+1,j} - \beta_{i-1,j})\right\} \\ &:= \frac{1}{4S^2} J_4(\alpha,\beta) \end{aligned}\right\} \quad (2.15)$$

Diese Approximationen überführen die DGL (2.13^b) in die zugehörige Differenzengleichung *)

$$\left(\nabla^2 - \mu_{ij}^2\right)\frac{\partial z}{\partial t} = F_{ij} := -\frac{1}{4} J_4(z, S+f) - \frac{\mu_{ij}^2 m_{ij}^2 g}{4S^2 f_{ij}} J_4(z, z_S) \quad (2.16^b)$$

mit $$\mu_{ij}^2 = \frac{S^2 A_0 f_{ij}}{m_{ij}^2 R T_0}\left(S_{ij} + f_{ij}\right), \quad S_{ij} = \frac{m_{ij}^2 g}{S^2 f_{ij}} \nabla^2 z$$

Nach ARAKAWA (1966) ist die 4-Punkte-Form (2.15) zur Approximation des JACOBI-Operators in ihren mathematischen und physikalischen Eigenschaften nicht zufriedenstellend. Die Integralbedingungen für quadratische Größen von physikalischer Bedeutung - wie etwa die Erhaltung der mittleren kinetischen Energie - werden von der folgenden 8-Punkte-Form zufriedenstellend wiedergegeben:

*) Das Analogon für das HALTINER-Modell (2.16^a) folgt auf S. 34.

$$\mathcal{J}_m(\alpha,\beta) \approx \frac{1}{4S^2}(\mathcal{OP}1+\mathcal{OP}2+\mathcal{OP}3)\cdot\frac{1}{3} := \frac{1}{4S^2}\mathcal{J}_8(\alpha,\beta)$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{OP}1 &= \alpha_{i+1,j}(\beta_{i,j+1}+\beta_{i+1,j+1}-\beta_{i,j-1}-\beta_{i+1,j-1}) \\
&\quad + \alpha_{i,j+1}(\beta_{i-1,j}+\beta_{i-1,j+1}-\beta_{i+1,j}-\beta_{i+1,j+1}) \\
\mathcal{OP}2 &= \alpha_{i-1,j}(\beta_{i,j-1}+\beta_{i-1,j-1}-\beta_{i,j+1}-\beta_{i-1,j+1}) \\
&\quad + \alpha_{i,j-1}(\beta_{i+1,j-1}+\beta_{i+1,j}-\beta_{i-1,j}-\beta_{i-1,j-1}) \\
\mathcal{OP}3 &= \alpha_{i+1,j+1}(\beta_{i,j+1}-\beta_{i+1,j}) + \alpha_{i-1,j+1}(\beta_{i-1,j}-\beta_{i,j+1}) \\
&\quad + \alpha_{i-1,j-1}(\beta_{i,j-1}-\beta_{i-1,j}) + \alpha_{i+1,j-1}(\beta_{i+1,j}-\beta_{i,j-1})
\end{aligned} \qquad (2.17)$$

Das folgende Schema gibt eine gute Übersicht über das Bildungsgesetz von $\mathcal{J}_8$:

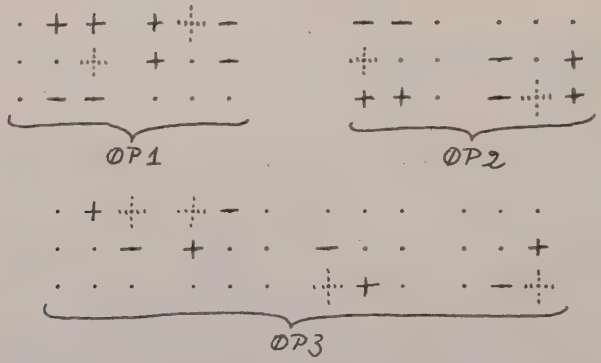


Abb. 3 : Schema zur Bildung von $\mathcal{J}_8$; ····· für α, —— für β

Eine Anwendung von $\mathcal{J}_8$ auf ein barotropes Modell findet sich z. B. bei MAINE (1967). In (2.16^b) ist lediglich $\mathcal{J}_4$ durch $\mathcal{J}_8$ zu ersetzen. Der Diskretisierungsfehler ist in (2.15) und in (2.17) von der gleichen Ordnung $\mathcal{O}(S^2)$.

Andere Approximationen als (2.14) für ∇_m^2 zur Bestimmung von Σ sind MIYAKODA (196o[a]) entnommen. Das Koeffizientenschema

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -2o & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{matrix}$$

liefert eine Unterdrückung der in (2.14) vorliegenden Überbetonung der Koordinatenachsenrichtungen (weil der Abbruchfehler bzgl. der Symmetrie $\mathcal{O}(S^2)$ ist und bzgl. der Richtung $\mathcal{O}(S^4)$) - als Nachteil werden "schlechte" Werte im Zentrum eingetauscht (vgl. MIYAKODA (196o[a])). Diese Approximation entsteht durch

$$\left.\begin{aligned} \nabla_m^2\alpha &\approx \frac{1}{3}\left\{ 2\,{}^{+}\nabla^2\alpha + {}^{\times}\nabla^2\alpha \right\} \quad {}^{*)} \\ &= \frac{1}{6S^2}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -2o & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (2.18)$$

Einen Kompromiß zwischen Überbetonung der Koordinatenachsen (bei (2.14)) und relativ hohem Fehler im Zentrum (bei (2.18)) erreicht die folgende 13-Punkte-Form (vgl. MIYAKODA (196o[a])) :

$$\left.\begin{aligned} \nabla_m^2\alpha &\approx \frac{1}{4}\left\{ 6\,{}^{+}\nabla^2\alpha - {}^{\times}\nabla^2\alpha - {}^{++}\nabla^2\alpha \right\} \quad {}^{*)} \\ &= \frac{1}{16S^2}\begin{bmatrix} & & -1 & & \\ & -2 & 24 & -2 & \\ -1 & 24 & -84 & 24 & -1 \\ & -2 & 24 & -2 & \\ & & -1 & & \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (2.19)$$

*) Die Indizierung $^{+}$, $^{\times}$ bzw. $^{++}$ bedeutet Heranziehung der durch o gekennzeichneten Punkte:

Anschließend an MAINE (1967) wird auch bei der LAPLACE-Operator-Diskretisierung in $(\nabla_m^2 + \mu^2)\frac{\partial z}{\partial t}$ der Differenzenoperator (2.14) mit anderen verglichen (eine systematische Zusammenstellung verschiedener solcher Diskretisierungen vgl. z. B. STRAEDE (1967)). Einerseits wird ein Vergleich zu einem Verfahren höherer Ordnung (vgl. MAINE (1967)) und andererseits zu (2.18) (vgl. MIYAKODA (196o^b)) durchgeführt. Die Approximationen (2.14) und (2.18) haben Abbruchfehler $\mathcal{O}(S^2)$ und der folgende Differenzenoperator ist von der Ordnung $\mathcal{O}(S^4)$:

$$\left.\begin{aligned} \nabla_m^2 \alpha \approx \frac{1}{3S^2}\Big\{ & 4(\alpha_{i+1,j} + \alpha_{i-1,j} + \alpha_{i,j+1} + \alpha_{i,j-1}) - 15\alpha_{ij} \\ & - \frac{1}{4}(\alpha_{i+2,j} + \alpha_{i-2,j} + \alpha_{i,j+2} + \alpha_{i,j-2})\Big\} \\ := \frac{1}{S^2}\nabla_2^2 \alpha & \end{aligned}\right\} \quad (2.2o)$$

D.h.

$$\nabla_2^2 : \frac{1}{12}\begin{bmatrix} & & -1 & & \\ & & 16 & & \\ -1 & 16 & -6o & 16 & -1 \\ & & 16 & & \\ & & -1 & & \end{bmatrix}$$

Mit (2.16^b) ist also ein Differenzengleichungssystem von der Form

$$(\nabla^2 - \mu_{ij}^2)\alpha = F_{ij} \qquad (2.21^b)$$

zu lösen, was bei Benutzung von (2.14) mit folgendem Overrelaxationsverfahren (vgl. etwa THOMPSON (1961 , S. 97), MAINE (1967)) durchgeführt wird :

$$\left.\begin{aligned} & \alpha_{ij}^{m+1} = \alpha_{ij}^{m} + \frac{\omega}{4+\mu_{ij}^2} R_{ij}^{m} \qquad (m = o, 1, 2, \ldots) \\ & \text{mit} \quad R_{ij}^{m} = \alpha_{i+1,j}^{m} + \alpha_{i,j+1}^{m} + \alpha_{i-1,j}^{m+1} + \alpha_{i,j-1}^{m+1} - (4+\mu_{ij}^2)\alpha_{ij}^{m} - F_{ij} \\ & \text{und dem Overrelaxationsfaktor} \quad \omega = e + 1 - \sqrt{e^2 - 1} \\ & \text{mit} \quad e = \left(\frac{4+\bar{\mu}^2}{2t}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \\ & t = \cos\frac{\pi}{N} \qquad \text{(für quadrat. N*N - Gitter)} \end{aligned}\right\} \quad (2.22)$$

bei vorgegebenen Randwerten von α und einer Anfangsnäherung α_{ij}^{o}. Dieses Iterationsverfahren soll abbrechen, wenn eine vorgegebene Schranke ε, die von den Genauigkeitsanforderungen abhängt (vgl. MIYAKODA (1960[b])), von zwei aufeinanderfolgenden Näherungen unterschritten wird, d.h.

$$\max_{i,j} \left| \alpha_{ij}^{m-1} - \alpha_{ij}^{m} \right| < \varepsilon \qquad (2.23)$$

Zur Herleitung der Iterationsverfahren (vgl. etwa COLLATZ (1964, S. 180-197), SHELDON (1962), YOUNG (1954), FRANKEL (1950)) wird von einem Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_\nu = r_i \qquad (i = 1, \dots n) \qquad \left[\text{bzw. } \mathbb{A}\, x = r\right]$$

ausgegangen, was bei einer Iteration in Einzelschritten zu

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(r_i - \sum_{\nu=1}^{i-1} a_{i\nu} x_\nu^{(m+1)} - \sum_{\nu=i+1}^{n} a_{i\nu} x_\nu^{(m)} \right)$$

führt (i = 1, ... n ; m = o, 1, ...). Mit $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \nwarrow & & A_R \\ & \mathbb{D} & \\ A_L & & \searrow \end{pmatrix}$ heißt dieses

$$\left(\mathbb{A}_L + \mathbb{D} \right) x^{(m+1)} + \mathbb{A}_R\, x^{(m)} = r \qquad (m \geq o) \quad .$$

Eine Konvergenzbeschleunigung wird durch

$$\mathbb{D} \left(x^{(m+1)} - x^{(m)} \right) = \omega \left(r - \mathbb{A}_L\, x^{(m+1)} - \left(\mathbb{A}_R + \mathbb{D} \right) x^{(m)} \right)$$

bei passendem ω erziehlt (Einzelschrittverfahren für $\omega = 1$). D.h. in

$$x^{(m+1)} = \mathbb{T}\, x^{(m)} + s \qquad (2.24)$$

hat $\mathbb{T}$ die Form

$$\mathbb{T} = \left(\mathbb{D} + \omega \mathbb{A}_L \right)^{-1} \left[(1-\omega)\, \mathbb{D} - \omega \mathbb{A}_R \right]$$

und das Verfahren verläuft gemäß:

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} - \omega D^{-1}\left[A_1 x^{(m+1)} + (A_2 + D) x^{(m)} - r\right]$$

Im Falle der Diskretisierung der POISSON-Gleichung $\nabla^2 \alpha = F$ (d.h. $\mu_{ij} = o$) hat bei Benutzung von (2.14) das Gleichungssystem $A x = r$ die Form

$$\begin{pmatrix} H & E & & & \\ E & H & E & & \textcircled{0} \\ & E & H & E & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & \textcircled{0} & & E & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \vdots \\ \alpha_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2^* \\ F_3^* \\ F_4^* \\ \vdots \\ F_{N-1}^* \end{pmatrix} \qquad (2.25)$$

mit quadratischen (N-2)*(N-2) - Teilmatrizen und zwar tridiagonalen

$$H = H_{N-2} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & 1 & & \textcircled{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & \textcircled{0} & & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

und Einheitsmatrizen

$$E = E_{N-2} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \textcircled{0} \\ & & \ddots & \\ & \textcircled{0} & & 1 \end{pmatrix},$$

ferner den Teilvektoren

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \alpha_{3,i} \\ \vdots \\ \alpha_{N-1,i} \end{pmatrix}, \qquad F_i^* = \begin{pmatrix} F_{2,i}^* \\ \vdots \\ F_{N-1,i}^* \end{pmatrix}$$

($i = 2, \ldots N-1$), wobei F_{ij}^* das durch die Einbeziehung der Randwerte geänderte F_{ij} bedeutet.

Durch Umnumerierung (vgl. SHELDON (1962)) in der Form, daß erst für i+j ungerade und dann für i+j gerade die α_{ij}^{n+1} bestimmt werden, erhält $\mathbb{T}$ in (2.24) die Form

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{T}_1 \\ \mathbb{T}_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

Unter dieser Voraussetzung ergibt sich dann der Bestwert ω_b des Overrelaxationsfaktors zu (vgl. COLLATZ (1964), SHELDON (1962))

$$\omega_b = \frac{2}{1+\sqrt{1-t^2}} \quad *) \qquad \text{mit} \quad 1 > t \geq \max_{\tau : \text{Ei.W.}(\mathbb{T})} |\tau| \qquad (2.26)$$

Im Falle eines quadratischen N*N-Gitters und bei Verwendung von (2.14) erhalten FRANKEL (195o) bzw. YOUNG (1954) :

$$t = \cos\frac{\pi}{N}$$

d.h.

$$\omega_b = \frac{2}{1+\sin\frac{\pi}{N}}$$

wie bei THOMPSON (1961) angegeben. Beim Übergang zu der in (2.21^b) vorliegenden HELMHOLTZ-Gleichung (nämlich $\mu_{ij} \neq o$) wird in (2.25) in der Hauptdiagonalen -4 durch $-4-\mu_{ij}^2$ ersetzt. Nach MIYAKODA (196o^b) wird dadurch ω_b kleiner und erhält die in (2.22) angegebene Form. Dabei ist in (2.26) für

$$\omega_b = \frac{2}{1+\sqrt{1-t^2}} = e+1-\sqrt{e^2-1} \qquad \text{mit} \qquad e = \frac{2}{t^2} - 1$$

---

*) Hierzu einige Umrechnungen, die es erleichtern, die verschiedenen in der Literatur angegebenen "Faktoren" ineinander zu überführen :

$$\omega - 1 = \frac{t^2}{(1+\sqrt{1-t^2})^2} \quad , \quad \omega = e+1-\sqrt{e^2-1} \quad \text{mit} \quad e = \frac{2}{t^2} - 1$$

$$\lambda = \frac{\omega-1}{\omega} = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-t^2}\right) = \frac{t^2}{2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}$$

durch das additiv hinzukommende μ_{ij}^2 folgende Änderung eingetreten:

$$e = \frac{2}{t^2} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{2t}\right)^2 - 1$$

$$\longrightarrow \qquad e = \frac{1}{2}\left(\frac{4 + \bar{\mu}^2}{2t}\right)^2 - 1$$

wobei $\bar{\mu}^2$ als Konstante angesehen wird (die relativ geringen Schwankungen von μ_{ij}^2 lassen dies zu); offenbar nimmt durch diese Änderung ω_b ab.

Bemerkungen:

i) Diese theoretisch herleitbaren ω_b-Werte beziehen sich immer auf quadratische N*N-Gitter, die aber in der vorliegenden Arbeit durch ein hemisphärisches Achteck ersetzt sind, was sich auch auf den Bestwert ω_b auswirkt (vgl. Teil 3).

ii) Die Verwendung von (2.18) bzw. (2.2o) an Stelle von (2.14) beeinflußt ebenfalls den zugehörigen Wert von ω_b (vgl. STRAEDE (1967)).

iii) Zur vergleichenden Beurteilung von (2.14), (2.18) und (2.2o) sei bereits vorausgeschickt, daß die Konvergenzgeschwindigkeit von Iterationsverfahren neben der Wahl von ω_b und der Ordnung des Verfahrens auch vom Überwiegen der Hauptdiagonalelemente abhängt, was bei beiden Verfahren 2-ter Ordnung einen Vorteil gegen (2.2o) zu geben scheint.

iv) Auf Blockiteration (vgl. COLLATZ (1964)) wird verzichtet, da der Aufwand beim Achteck beachtlich ist (vgl. dazu das Bildungsgesetz auf S. 36).

Nach den Ausführungen über die Iterationsverfahren und die Überrelaxierung nun zurück zu dem Modell. Die (2.1o^a), (2.16^b) entsprechende Differenzenform für das HALTINER-Modell ist:

$$(\nabla^2 - M)\frac{\partial z}{\partial t} = F_{ij} := -\frac{1}{4} f_v(z, S+f) - \frac{M m_{ij}^2 g}{4 S^2 f_{ij}} f_v(z, z_g) \qquad (2.16^a)$$

mit $\quad M = \dfrac{S^2 A_o \rho_o f_o^2}{m_{ij}^2 p_o}$, $\quad S_{ij} = \dfrac{m_{ij}^2 g}{S^2 f_{ij}} \nabla^2 z$

Der Unterschied zwischen (2.16^a) und (2.16^b) besteht darin, daß M im Gegensatz zu μ^2 nicht von der Zeit t abhängt. Ob die "schwache" z-Abhängigkeit von μ^2 Einfluß auf Ergebnisse und Verfahrenseigenschaften hat, wird im Teil 3 untersucht.

Zu vollziehen bleibt noch der Übergang vom quadratischen N*N - Gitter auf das hemisphärische Achteck. In dem Oktogon-Gebiet G(x, y) von Abb. 4 sei an äquidistanten Gitterpunkten (der Nordpol NP ist Gitterpunkt, S = 381 km, λ = 1o°E ist Gitterpunktslinie bei stereographischer

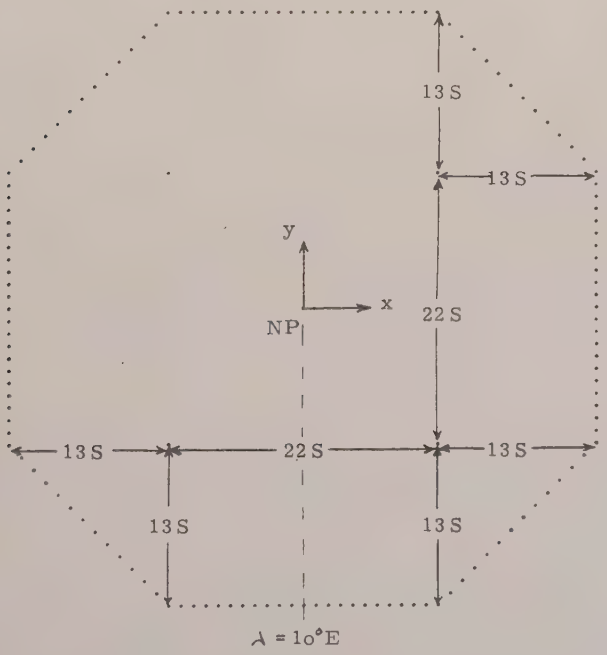


Abb. 4 : Oktogon-Gittergebiet für die Nordhemisphäre

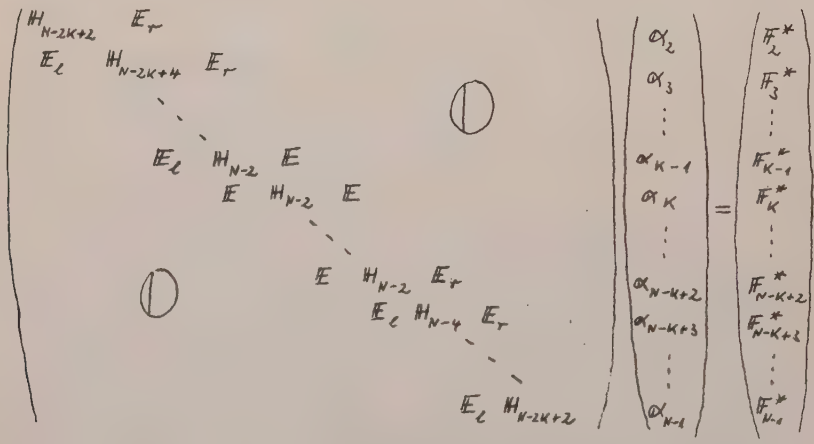
Projektion in 6o°N / vgl. DWD-Bericht (196o)) vorgegeben:

z_{ij} zur Zeit t = o (Höhe der 5oo mb - Fläche in Dekameter $\left[\frac{m^2}{1oo}\right]$ / Wetterlage vom 4.1.1962),

$z_{g_{ij}}$ (Höhe des Erdbodens über NN in [m] / entnommen EDELMANN/ REISER (1962)),

φ_{ij} (geographische Breite der Gitterpunkte / aus dem Programm STEPRO).

Die Übertragung von (2.25) auf das Achteck G(x,y) liefert für die POISSON-Gleichung $\nabla^2 \alpha = F$ mit dem Differenzen-Operator (2.14) das Gleichungssystem



(2.27)

mit quadratischen Tridiagonalmatrizen H_I, E wie in (2.25) und zusätzlich rechteckigen Teilmatrizen

$$E_r = \begin{pmatrix} o & 1 & o & & & & \\ & o & 1 & o & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & o & 1 & o \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} o & & & \\ 1 & o & & \\ o & 1 & o & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & o \\ & & & 1 \\ & & & o \end{pmatrix} = E_l \quad ,$$

in Spalten- und Zeilenanzahl entsprechend ihrer Stellung in der Matrix $\mathcal{A}$; ferner den Teilvektoren

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{K,2} \\ \alpha_{K+1,2} \\ \vdots \\ \alpha_{N-K+1,2} \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} \alpha_{K-1,3} \\ \alpha_{K,3} \\ \vdots \\ \alpha_{N-K+2,3} \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad \alpha_{K-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{2,K-1} \\ \alpha_{3,K-1} \\ \vdots \\ \alpha_{N',K-1} \end{pmatrix},$$

$$\ldots \alpha_{N-K+2} = \begin{pmatrix} \alpha_{2,N-K+2} \\ \alpha_{3,N-K+2} \\ \vdots \\ \alpha_{N',N-K+2} \end{pmatrix}, \quad \alpha_{N-K+3} = \begin{pmatrix} \alpha_{3,N-K+3} \\ \alpha_{4,N-K+3} \\ \vdots \\ \alpha_{N-2,N-K+3} \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad \alpha_{N'} = \begin{pmatrix} \alpha_{K,N'} \\ \alpha_{K+1,N'} \\ \vdots \\ \alpha_{N-K+1,N'} \end{pmatrix}$$

und entsprechend $\mathcal{F}_i^*$. D.h. zwischen Zeile "2, K-1" und "N', N-K+2" gilt das Schema der Form (2.25), darüber und darunter wirkt sich das Achteck aus. Im Falle der HELMHOLTZ-Gleichung ist die -4 in der Hauptdiagonalen von $\mathcal{H}_I$ durch $-4-\mu_{ij}^2$ zu ersetzen, wobei ij die Indizes sind, die in der Zeile von F_{ij}^* stehen. Der Wert von ω_b ändert sich durch die abgewandelte Gebietsform und wird in Teil 3 experimentell bestimmt.
Für N und K gilt im konkret vorliegenden Fall

$$K = 14 \quad , \quad N' = N - 1 = 48 \quad .$$

Bzgl. der Randwerte wird

$$\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{\partial G} = 0 \tag{2.28}$$

als Randbedingung genommen (vgl. DWD - Bericht (196o); durch Interpretation des Randes als feste Wand, d.h. $u_{\partial G} = v_{\partial G} = o$). Der Rand ∂G liegt im behandelten Fall zwischen 1o°N und 15°N, und $G \cup \partial G$ umfaßt 2o37 Gitterpunkte.
Die ferner im Modell auftretenden Konstanten werden zu folgenden Werten angesetzt:

$g = 9,8o665 \quad \left[\frac{m}{sec^2}\right]$

$R_1 = 286,8 \quad \left[\frac{m^2}{sec^2 \cdot °K}\right]$

$T_o = 288 \quad [°K]$ (als mittlere Januartemperatur am Boden)

$o,4 \leq A_o \leq o,5$ (der "Best"wert wird in Teil 3 diskutiert)

d. Programmplanung

Im Überblick ist das THOMPSON-Modell (2.16^b) zugrunde gelegt.

i) In der Datenvorbereitung werden über

STEPRO die φ_{ij} - Werte an den Gitterpunkten bestimmt,

und über

UMSPEI die gefilterten Felder *) $z_{g_{ij}}$ und z_{ij}
und das Anfangs-Iterations-Feld $dz_{ij} = o$
für die Tendenz erzeugt.

Diese vier Felder werden in der Reihenfolge ZG, PHI, Z, DZ auf dem "Datenfile" bereitgestellt.

ii) Zwei Hauptprogrammversionen **) (C25o für festes Δt und C252 für automatisch bestimmtes Δt) sorgen für den organisatorischen Ablauf:

α) Bereitstellung von ZG_{ij}, $SI_{ij} = SIN(PHI_{ij})$, Z_{ij}, DZ_{ij} und Setzung von Anfangsparametern in den Unterprogrammen.

---

*) Da die Annahme von S. 18 - ϕ_o repräsentiere keine Wellenlängen, die nicht vom gewählten Gitter erfaßt werden - für die subjektiv gewonnenen Werte von Z_{ij}, ZG_{ij} nicht gewährleistet ist, wird eine Anfangsfilterung nötig.

**) Ein drittes Hauptprogramm CIOGT dient der experimentellen Ermittlung von ω_b.

β) Rechenschleife:

YACOB (Gewinnung von $U_{ij}(Z_{ij}, SI_{ij})$ und $F_{ij}(Z_{ij}, SI_{ij}, ZG_{ij})$ für RELAX)

RELAX (Gewinnung von DZ_{ij}neu$(U_{ij}, F_{ij}, DZ_{ij}$alt$)$)

PRED (Gewinnung von Z_{ij}(neu)$(Z_{ij}$alt$, DZ_{ij})$ mit Speicherung der verschiedenen DZ-Felder auf dem "g-file" und automatischer Kontrolle und Bestimmung von Δt)

EXTEST (Plausibilitätskontrolle von Z_{ij}-pred an Hand der auftretenden Gradienten und ggf. notwendig werdende Filterung)

iii) Beim Ablauf des Programms werden folgende weitere Unterprogramme benutzt:

FILT (zur Glättung)

BUFFIO (zur Ein- und Auslagerung von Datenfeldern)

OUTPUT, AUSLAG } (zur Ergebnis- und Zwischenergebnis-Ausgabe bzw. Speicherung von Zwischenergebnissen zur nachfolgenden vergleichenden Auswertung)

ANAL (Ausgabe einer Zebra-Analyse auf dem Zeilendrucker)

iv) Zum Ablauf der "oktogonalen" DO-Schleife vgl. Abb. 5, die zu fol-

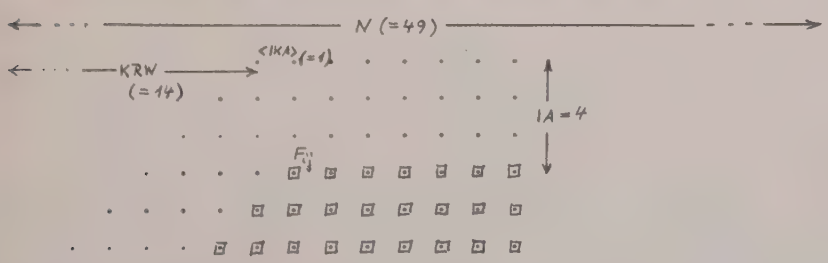


Abb. 5 : Oktogon-Ecke; es gilt KR = KRW + IKA

gendem Schema führt:

```
      N3 = N - IA + 1
      KK = N - KR + 1
      M = KR + 1
      MM = N - KR
      DO 2o I = IA , N3
      IF ( I . GT . KR ) IF ( I - KK ) 14 , 14 , 12
      M = M - 1
      MM = MM + 1
      GO TO 14
12    M = M + 1
      MM = MM - 1
14    DO 2o J = M , MM
         .
         .
         .
2o    CONTINUE
```

v) Bemerkung zur ε-Wahl in RELAX (vgl. MIYAKODA (196o[b])) :
Die Fehlergleichung (vgl. S. 3o/31)

$$(\nabla^2 - \mu^2)\,\varepsilon = R_{ij}$$

führt zu

$$\varepsilon_o \approx \left(\mu^2 + \frac{2\pi^2}{(\overline{N}-1)^2}\right) |\varepsilon_{ij}| \qquad (2.29)$$

d.h. $\varepsilon_o \approx$ o,o13 für $\overline{N} = 4o$ und $\mu^2 = o$ bei $|\varepsilon_{ij}| = 1$. Die Abschätzung

$$\mu_{ij}^2 \approx \frac{S^2 A_o f_{ij}^2}{m_{ij}^2 R T_o} \approx \frac{380 \cdot 380 \cdot 10^6 \cdot 0{,}45 \cdot (1{,}46 \cdot 0{,}7)^2 \cdot 10^{-8}}{1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 290 \cdot 290} \approx 0{,}01$$

liefert dann durch μ^2 eine Abänderung auf $\varepsilon_o \approx$ o,o25 . Die effektive Wahl von ε wird in Teil 3 an Hand der Auswertung in Zusammenhang mit der Wahl von A_o getroffen.

vi) Bemerkungen zur Organisation bei automatischer Δt - Bestimmung:

α) Im Vorlauf PRED(. . . KLM = o . . .) "INPUT" von

DT_{Anfang} , BETA , SIGMA1 , SIGMA2 (, UNTGR) *)

β) Während der Rechenschleife im Hauptprogramm Speicherung aller DT - Werte mit "Vorzeichen" als Hinweis auf "Hin- oder Rückrechnung" ; beim letzten Schritt wird die Besonderheit beachtet, daß kein "zu kleines" DT entsteht.

vii) Eine Zusammenfassung von Teil 2 ergibt folgende durchzuführende Vergleiche:

Modelle : (2.16^a) und (2.16^b)

JACOBI - Operator : generell $\mathcal{J}_8$
(zuzüglich eines $\mathcal{J}_4$ - Vergleichs)

LAPLACE - Operator für $\zeta = \frac{3}{\rho} \nabla^2 z$:
(2.14) , (2.18) und (2.19)

} d.h. 6 (+ 2) Versionen für YACOB

Iterations - Verfahren : (2.14) , (2.18) und (2.2o) in je zwei Versionen (LIEBMANN : sukzessives Vorgehen ; SHELDON : schachbrettmäßiges Vorgehen), d.h. 6 Versionen für RELAX

Vorhersage - Schritt : 11 Versionen für PRED gemäß Übersicht Seite 18 oben

Bzgl. der Anfangswerte werden zwei Sätze von Z_{ij} - Werten benutzt, einmal Filterung mit Spiegelung am Rand, zum anderen ohne Spiegelung am Rand.

*) UNTGR nur bei den Verfahren mit auftretendem Nenner im Fehlerglied.

3. Ergebnisse durchgeführter Experimente

a. Theoretische Auswertungsgrundlagen

Es werden das prognostizierte Feld mit z_p ,
das eingetretene mit z_w
und das Anfangsfeld mit z_a
bezeichnet. Statistisch zu vergleichen sind z_p und z_w , um eine Aussage über die "Güte" des Prognoseverfahrens zu machen.
Die einfachste statistische Maßzahl für diesen Zweck ist der Korrelationskoeffizient

$$C = \frac{\sum \left\{ (z_{p_{ij}} - \bar{z}_p)(z_{w_{ij}} - \bar{z}_w) \right\}}{\sigma(z_p)\,\sigma(z_w)} \qquad (3.1)$$

mit dem Mittelwert $\bar{z}$ und der Streuung $\sigma(z)$ für das z_{ij} - Feld. Es stehen dabei zwei Möglichkeiten zur Wahl:

i) die Benutzung eines globalen Korrelationskoeffizienten,

ii) die Betrachtung von Mittelwert und Streuung regionaler Korrelationskoeffizienten in zwei verschiedenen Regionalformen

α)

. . .
. . .
. . .

β)

.
. . .
. . . . . .
. . .
.

mit beliebiger der Form entsprechender Punktzahl (achsenparalleles bzw. auf die Spitze gestelltes Quadrat).

Da die Korrelation der Felder selbst i.a. sehr hoch ist (vgl. etwa REYMANN (1958)), werden Änderungsfelder betrachtet

$$\Delta z_p = z_p - z_a \quad , \quad \Delta z_w = z_w - z_a$$

und über diese der Korrelationskoeffizient (3.1) gebildet.

Nach REYMANN (1958) berücksichtigt der Korrelationskoeffizient nicht den Amplitudenfehler. Dieses Manko wird durch die Benutzung eines "Strukturkoeffizienten" *)

$$f_g = 2 \frac{\sqrt{\sum (\Delta z_{p;i} - \Delta z_{w;i})^2}}{\sqrt{\sum \Delta z_{p;i}^2} + \sqrt{\sum \Delta z_{w;i}^2}} \qquad (3.2)$$

mit $-1 \leq 1 - f_q \leq 1$ aufgehoben, der allerdings noch den Niveaufehler $\overline{\Delta z_p} - \overline{\Delta z_w}$ enthält, dessen Elimination zu

$$f_g^{(s)} = 2 \frac{\sqrt{\sum (\Delta z_{p;i} - \Delta z_{w;i} - \overline{\Delta z_p} + \overline{\Delta z_w})^2}}{\sqrt{\sum (\Delta z_{p;i} - \overline{\Delta z_p})^2} + \sqrt{\sum (\Delta z_{w;i} - \overline{\Delta z_w})^2}} \qquad (3.3)$$

führt. Die "Güte" ergibt sich dadurch, wie nahe $1 - f_q^{(s)}$ bei Null liegt.

Die Untersuchung des zeitlichen Verlaufs einer der statistischen Vergleichsgrößen (Korrelations- oder Strukturfunktion bzw. Mittelwert und Streuung ihrer Regionalanteile)

$$f(t) = \text{STAT} \left(z_t - z_a \mid z_w - z_a \right) \qquad (3.4)$$

ermöglicht z.B. die Erkennung ggf. auftretender Phasenverschiebungen (für den "Best"wert) in den Modellen.
Zu beachten ist, daß in den Abweichungen zwischen z_p und z_w sowohl Modell- als auch Verfahrensfehler enthalten sind.

*) Vgl. auch GANDIN (1965).

b. Ergebnisse

i) Bestimmung von ω_b :

Für die sechs zur Wahl stehenden Iterationsverfahren RELAXij (i = 1 : LIEBMANN , i = 3 : SHELDON ; j = 1 : (2.14) , j = 2 : (2.2o) , j = 3 : (2.18)) wird ω_b in Abhängigkeit von der Gebietsform (IA = 4 : das benutzte hemisphärische Achteck , IA = 14 : das innere Quadrat*)) und von dem Parameter A_o bestimmt, und die Verfahren werden bezüglich ihrer Ökonomie miteinander verglichen (die endgültige Auswahl des günstigsten Verfahrens fällt allerdings erst in ii)). Zum Zwecke der ω_b-Bestimmung wird die Anzahl der Relaxationen bei festem ε über ω aufgetragen - $f = \#\mathrm{Rel}(\omega)$ - für verschiedene Werte von IA (= 4 , 8 , 14) und A_o (= o,4o ; o,45 bzw. o,5o). Es ist je ein vollständiges Diagramm zu einem A_o-Wert für RELAX12 und für RELAX31 in Abb. 6 bzw. in Abb. 8 angegeben.

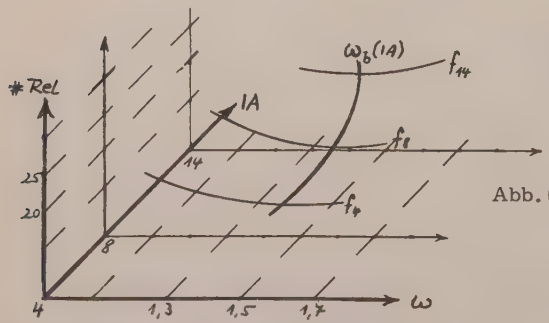


Abb. 6 : Diagramm von $f_{IA} = \#\mathrm{Rel}(\omega)$ für RELAX12 bei $A_o = o,4$

Für RELAX12 ergibt sich aus Abb. 6 : $\omega_b(IA = 4) \approx 1,6$

RELAX32 weist für IA = 4 steilere Flanken auf als RELAX12 bei geringerer Relaxationsanzahl im Tal von ω_b (1o% bei $\omega = 1,3$ und 3o% bei $\omega_b \approx 1,6$ / vgl. Abb. 7).

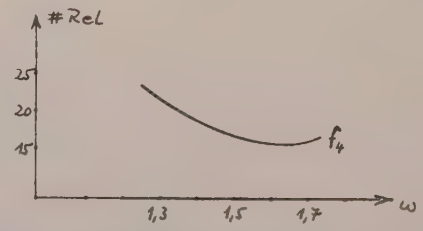


Abb. 7 : f_4 für RELAX32 bei $A_o = o,4$

*) vgl. Abb. 5, S. 39

In RELAX13 ergibt sich für $0.4 \leq A_0 \leq 0,5$: $\omega_b(IA=4) \approx 1,53$

Im Vergleich dazu liefert RELAX33 $\omega_b(IA=4) \approx 1,56$ mit 30% weniger Schritten als in RELX13 und 20% weniger als in RELAX32.

In RELAX11 ergibt sich $\omega_b(IA=4) \approx 1,55$, wobei die Schrittzahl um 10% über der von RELAX13 liegt, dafür aber der Aufwand pro Iterationsschritt nur die Hälfte beträgt. Abschließend folgt noch das Diagramm für RELAX31 (vgl. Abb. 8), das

$$\omega_b(IA=4) \approx 1,60$$

liefert. Das Diagramm weist bei RELAX31 wieder steilere Flanken auf

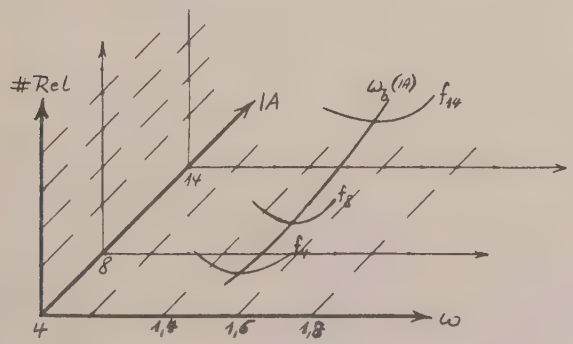


Abb. 8 : Diagramm von $f_{IA} = \#Rel(\omega)$ für RELAX31 bei $A_0 = 0,45$

als bei RELAX11. Bei ω_b liegt der Gewinn für RELAX31 - gemessen an der Schrittzahl - bei 30%, dafür ist der zeitliche Aufwand pro Iterationsschritt durch das schachbrettartige Verfahren etwas höher, so daß der verbleibende Vorteil für RELAX31 bei etwa 10% liegt. Berücksichtigt man, daß sich durch die steileren Flanken ein Fehler bei der ω_b-Wahl hier stärker auswirkt als bei RELAX11, so kann festgestellt werden, daß RELAX11 (für $\omega = 1,55$) und RELAX31 (für $\omega = 1,60$) ziemlich gleichwertig sind.

ii) Bestimmung von A_o und ε_{relax} aus statistischen Bestwerten und Auswahl von $RELAX_{opt}$:

Es wird die statistische Bewertung (stat. Bew. / gemäß $1 - f_q^{(s)}$ nach (3.3)) der Vorhersagen für 24 Stunden über A_o aufgetragen und daraus das Optimum $A_o \approx o,5$ abgelesen (vgl. Abb. 9). Für das so gefundene A_o wird über ε_{relax} die stat. Bew. der Prognosen aufgetragen und daraus als optimales $\varepsilon_{relax} \approx o,2 * 1o^{-2}$ bestimmt (vgl. Abb. 1o), wobei ε auch von RELAXij abhängt. Als optimales Verfahren wird RELAX11 mit $\varepsilon \approx o,oo2$ gewählt.

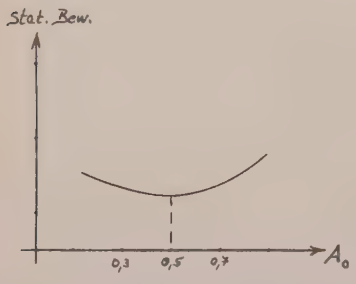


Abb. 9 : stat. Bew. von Vorhersagen in Abhängigkeit von A_o (mit RELAX11 und YACOB22 *))

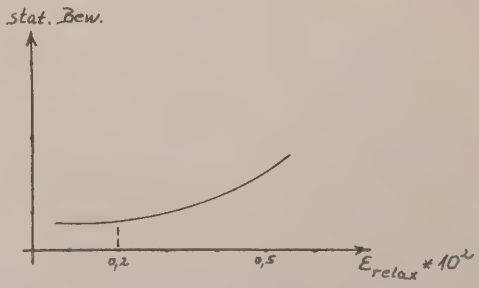


Abb. 1o : stat. Bew. von Vorhersagen in Abhängigkeit von ε_{relax} für RELAX11 (mit YACOB22)

iii) Vergleich der beiden Modelle und der unterschiedlichen Behandlung der Ränder bei den Anfangswerten :

Im HALTINER-Modell (2.16^a) liegt der statistische Bestwert bei 24 Stunden, jedoch ist er schlechter als die stat. Bew. für 24 Stunden beim THOMPSON-Modell (2.16^b), das seinen Bestwert erst mit einer Zeitverzögerung von 6 Stunden erreicht. Es gilt also

*) Die Verschlüsselung in YACOBij bedeutet: $i = 2$; $j < 5$ für (2.16^b) , $j > 5$ für (2.16^a) , $j = 1$ oder 6 für (2.15) sonst (2.17) , $j = 2$ oder 7 für (2.14) , $j = 3$ oder 8 für (2.18) , $j = 4$ oder 9 für (2.19) .

Bestwert (THOMPSON-M. / ≈ 3o Std.)
besser als
stat. Bew. (24 Std.; THOMPSON-M.)
besser als
Bestwert (HALTINER-M. / ≈24 Std.) .

Die Anfangswerte mit randgespiegelter Filterung sind zwar vom mathematischen Standpunkt gesehen korrekt (vgl. S. 37 unten), jedoch liefert ihre Verwendung im Laufe der Vorhersage stärkere Störungen am Rand als die Benutzung von Anfangswerten, die ohne Spiegelung geglättet wurden (vgl. hierzu auch FISCHER (197o)). Dies dürfte seinen Grund darin haben, daß physikalisch ja am Außenrand gar keine feste Wand ist, und somit die ungespiegelten Werte das meteorologische Verhalten besser beschreiben.

iv) Vergleich der Verfahren für PRED :

A) Das Prognose-Verfahren erster Ordnung PRED31 - ein Vorwärtsdifferenzenverfahren, das stabil bleibt - liefert von den Strukturen her meteorologisch sinnvoll erscheinende Ergebnisse (s. Anhang A). Allerdings beim Vergleich der stat. Bew. haben diese Ergebnisse wenig mit der wirklich abgelaufenen meteorologischen Entwicklung zu tun. Somit läßt sich schließen, daß die im Falle der Approximation von erster Ordnung in der Zeit t vernachlässigten Glieder $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ für die reale Wetterentwicklung von signifikanter Bedeutung sind (d.h. bei der realen Wetterentwicklung müssen Effekte eine entscheidende Rolle spielen, deren Modellierung sich in nicht vernachlässigbaren Nichtlinearitäten niederschlägt). Dies ist ein Ergebnis, das mit den bisher üblichen Verfahren nicht in dieser Sicherheit erkennbar war.

B_1) Die Bestätigung des FEHLBERG-Argumentes (S. 8/9), daß sich beliebig hohe Ordnungen bei der Anwendung von R-K- und R-K-F-Verfahren auf partielle DGLen wegen der Beschränkung durch Stabilitätsforderungen nicht auszahlen, wird schon bei festem Δt augenfällig : PRED12 ist PRED14 überlegen (Δt ist bei PRED14 nur etwa doppelt so groß wie bei PRED12 wählbar, während der Aufwand pro Zeitschritt das drei- bis vierfache beträgt).

B_2) Optimal bei variablem Δt verhalten sich PRED32 und PRED33 , und zwar gegenüber

PRED34 sowohl wegen des oben schon erwähnten FEHLBERG-Argumentes als auch wegen der bei PRED34 geringeren Ökonomie (vgl. S. 14),

PRED43 natürlich nur geringfügig (vgl. S. 12),

PRED21/22 ganz offenkundig (diese beiden sind auch PRED34 weit unterlegen),

PRED23 ebenfalls beachtlich, d.h. die R-K-F-Verfahren sind eben wirklich erheblich besser als die R-K-Verfahren (33 gegen 23 / und oben schon 34 gegen 21/22).

B_3) Zusammenfassend ist festzuhalten, daß für den abschließenden Vergleich von festem und variablem Δt verbleibt:

PRED12 *) gegen PRED32/33

Wenn die Ergebnisse mit variablem Δt bekannt sind, so ist es ggf. möglich, die Verfahren mit festem Δt optimaler zu nutzen; dieses Argument entfällt allerdings, falls die Δt - Wahl von der jeweiligen Wetterlage abhängt (man beachte dabei auch die Schwankungen in den $\Delta t(t)$ - Kurven, z. B. in Abb. 13). Bei festem Δt ergibt sich bzgl. der stat. Bew. das Diagramm in Abb. 11 . Um sicher zu gehen, muß allerdings Δt wesentlich unter dem kritischen optimalen Punkt liegen (vgl. auch FEHLBERG (197o) / Zitat vo S. 6 der vorliegenden Arbeit). Zur Festlegung des Parameters β bei variablem Δt ergibt sich das Diagramm in Abb. 12 , und für σ_1, σ_2 folgt in Abhängigkeit

*) PRED11 wird nicht näher betrachtet, da es PRED12 höchstens gleichwertig ist.

von stat. Bew. und Rechenzeit (ungünstige σ ergeben einerseits unnötige Wiederholungsrechnungen bzw. erlauben andererseits nur zu geringe Variationen in Δt) :

$$\sigma_1 = 0{,}25 \quad , \qquad \sigma_2 = 0{,}50$$

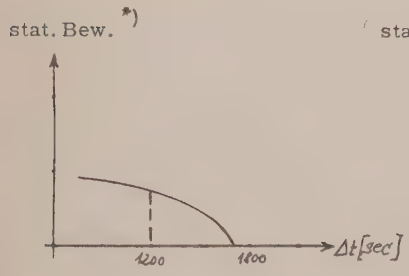


Abb. 11 : stat. Bew. von Vorhersagen in Abhängigkeit von Δt bei PRED12

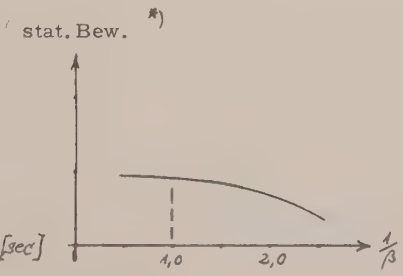


Abb. 12 : stat. Bew. von Prognosen in Abhängigkeit von β bei PRED32

Bei $\beta = 1$ und den oben angegebenen σ ist die stat. Bew. von PRED32 etwas besser als die für das ca. 10% schnellere PRED12 ($\Delta t = 1200$). Einige Kurven für den zeitlichen Δt - Verlauf sind in Abb. 13 dargestellt. Abschließend ist im Vergleich von PRED12 mit PRED32/33 zu sagen, daß die beiden Verfahren mit variablem Δt dem Verfahren mit festem Δt unter verschiedenen Gesichtspunkten überlegen sind : zum einen sind sie sicherer und damit im Endeffekt auch schneller und ökonomischer, zum anderen ermöglichen sie - wie schon in A) zu ersehen ist - Erkenntnisse, zu denen bei festem Δt nicht zu gelangen ist (vgl. dazu ferner vi) und den Punkt c)).

*) stat. Bew. ist hier gemäß $f_q^{(s)}$ aufgetragen.

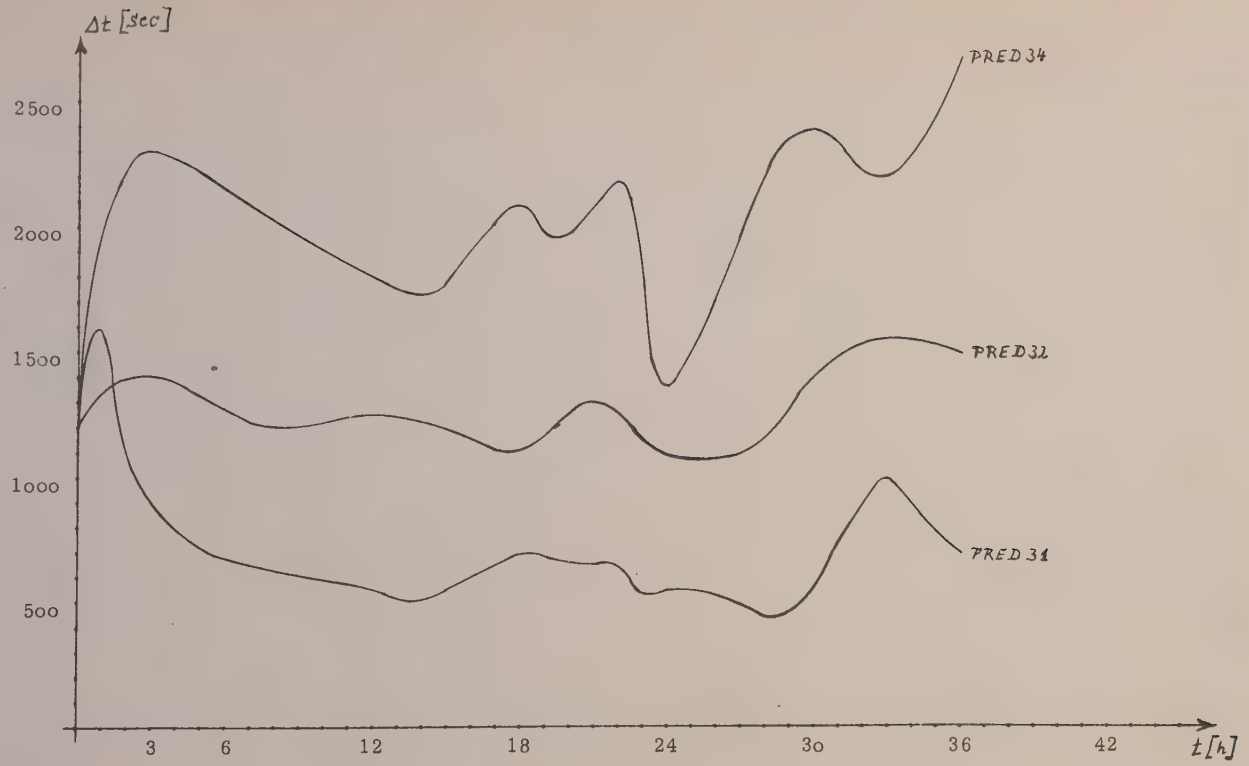


Abb. 13 : automatisch bestimmtes Δt in Abhängigkeit vom Zeitpunkt t des Prognoseschrittes

v) Diskussion der verschiedenen Näherungen in F_{ij} (d.h. auf der rechten Seite in den Modellgleichungen):

A) Die Bestätigung des Einsatzes von $\mathcal{F}_8$ gegenüber $\mathcal{F}_4$ wird bei automatisch bestimmtem Δt völlig klar, nämlich bei Verwendung von $\mathcal{F}_4$ ergeben sich beachtliche Schwankungen von Δt, die zu zeitweise sehr kleinen Δt führen (Instabilitäten, die allein durch die Approximation gemäß (2.15) für den JACOBI-Operator entstehen).

B) Daß die komfortableren Näherungen (2.18) und (2.19) für den LAPLACE-Operator zur Bestimmung von $\nabla^2 z$ nicht den erwarteten Erfolg zeigen (die beste stat. Bew. erreicht nämlich (2.14)), mag daran liegen, daß diese beiden Näherungen einen "zu großen" Werte-Einzugsbereich haben, der meteorologisch nicht mehr gerechtfertigt ist. Ihr Einsatz müßte bei Modellen mit geringerer Maschenweite erneut erprobt werden.

vi) Weitere meteorologisch relevante Ergebnisse ergeben sich aus Untersuchungen von Trend und Schwankungen in den $\Delta t(t)$ - Kurven :

A) Die Notwendigkeit, den ersten Zeitschritt in kleinere zu unterteilen, um Anfangsinstabilitäten zu vermeiden (vgl. DWD-Bericht (196o)), entfällt nahezu durch die Filterung der Anfangsfelder.

B) Nach etwa 72 Stunden vergrößert sich die Schrittweite Δt sprungartig um etwa 3o%. Die zu Beginn meteorologisch realen Daten sind dann im Verlauf der Prognose zu Modelldaten geworden. Der Zeitpunkt stimmt mit den Predictability-Aussagen von LEITH (197o) und von LORENZ (1963) überein.

C) Das leichte Absinken von Δt in PRED32 und der starke Einbruch bei PRED34 zeigen (s.Abb.13), wie sich Δt bei diesen Verfahren auf den für die Wetteränderung zum Zeitpunkt t benötigten Zeitscale einreguliert; dies ist ein Aspekt, der für die Anwendung der Verfahren mit variablem Δt auf anspruchsvollere Modelle an Bedeutung gewinnt.

c. Resumé

Trotz des sehr einfachen ausgewählten Beispiels ergeben sich meteorologisch weitreichende Aussagen (vgl. iv)A) , vi)B) , vi)C) , v)A) , vi)A)). Die beiden Verfahren 2-ter und 3-ter Ordnung PRED32/33 mit variablem Δt sind im Aufwand einander gleichwertig und ökonomisch optimal (die Verfahren mit festem Δt sind vergleichsweise zu unsicher - vgl. vi)C) - und liefern nebenher auch kaum Hinweise für interessante Aussagen). Die durch die automatische Kontrolle von Δt fortfallende Unsicherheit, daß bei kritischen Situationen im Wettergeschehen (s. vi)C)) das festgewählte Δt zu groß sein könnte, um den zu diesem kritischen Zeitpunkt benötigten Zeitscale zu erfassen, entfällt durch die in dieser Arbeit aufgezeigten Verfahren; dieses sollte auch für den Routine-Einsatz von Vorteil sein. Für den Forschungsaspekt ist von besonderem Interesse, daß man über das Verhalten der $\Delta t(t)$-Kurve zu weitreichenden meteorologisch relevanten Aussagen kommt; an Hand dieser Kurve ist es möglich, z.B. zum einen Inkonsistenzen in Modellen und/oder numerischen Näherungen - vgl. v)A) - durch "Einbrüche" in Δt zu erkennen, bzw. zum anderen zu einer Kontrolle bei der "Einspeisung" von Zusatz-Termen in Modelle zu gelangen, nämlich etwa durch das automatische Einspielen von Δt auf den zur Erfassung des zu untersuchenden Effektes im Modell benötigten Zeitscales. Insgesamt gesehen ergibt sich mit Sicherheit in Hinsicht von Punkt iii) der Einleitung ein beachtlicher Vorteil der hier verwendeten Verfahren mit variablem Δt, dieses ist besonders für die Übertragung auf weitere Beispiele von beachtlicher Bedeutung (z.B. MERILEES (1974)); auch aus der Sicht der Ökonomie (Punkt i) und ii) der Einleitung) liegt unter Hinzuziehung des Sicherheitsaspektes ein Plus bei den neu entwickelten Verfahren. Der oberflächlich als Nachteil erscheinende Effekt, daß bei variablem Δt das Geopotentialfeld (bzw. andere Felder bei anderen Beispielen) nicht mehr zu festen Zeitpunkten bestimmt wird, ist ohnehin heutzutage belanglos, wegen einerseits des Einbaus nicht-synoptischer Beobachtungen (z.B. Satelliten-Meldungen / vierdimensionale Analyse - TALAGRAND (1972) -) und andererseits des Einbaus von Nesting-Verfahren (DAVIES (1974)) und der Benutzung kombinierter Modelle (Hemisphären-Tropen-Modell).

4. Ausblicke

Die guten Ergebnisse bei diesem einfachen Beispiel ermutigen zur Weiterführung der grundsätzlichen Aufgabenstellung dieser Arbeit in zweierlei Hinsicht:

Einerseits können die Grundtypen PRED32/33 für meteorologische Fragestellungen weitreichend eingesetzt werden durch ihre Anwendung auf komfortablere Modelle *) etwa bei Verwendung global kugelgerechter Gitter (SADOURNY / ARAKAWA / MINTZ (1967)), Benutzung des NCAR-Modells (OLIGER / WELLCK / KASAHARA / WASHINGTON (197o), WILLIAMSON (1973)), gekoppelter Modelle und/oder von Spektral-Modellen (z.B. BOURKE (1974) / als einfaches spektrales Modell zum vergleichenden Test für die Einsetzbarkeit etwa das von ELSAESSER (1966)) einschließlich der Ausschöpfung der hierbei erreichbaren Vergleichsmöglichkeiten und Interpretation des $\Delta t(t)$-Verlaufs (zur Problematik bzgl. Δt vgl. z.B. MERILEES (1974)); zusätzlich ihrer Anwendung auf weitere prognostische Problembereiche, die bei ihrer Behandlung Diskretisierung in der Zeit t erfordern (z.B. instationäre Ausbreitungsmodelle / GUTSCHE (i.V.)).

Andererseits wird es weiterhin nötig sein auch in Richtung der Methodenentwicklung bei der Diskretisierung in der Zeit t weiterzukommen, etwa durch Ausnutzung von Verfahren höherer Ordnung bei hyperbolischen DGLen (ANSORGE (1963) bzw. KREISS / OLIGER (1972)) und/oder der Anwendung von Intervallmethoden (z.B. TOST (197o)) und (lokalen) LIE-Reihen (GRÖBNER / KNAPP (1967)), letzteres auch als evtl. ideale Möglichkeit bei lokalem Nesting (DAVIES (1974)), wobei die Δt-Kontrolle wegen sonst möglicher Instabilitäten von entscheidender Bedeutung sein sollte.

Mittels dieser beiden möglichen Weiterentwicklungsrichtungen ist auch der Einbau kleinräumigerer Prozesse in Prognosemodelle unter Verwendung unterschiedlicher Δt in verschiedenen Regionen zu erreichen.

---

*) Die Fußnote von S. 7 gewinnt dabei natürlich an Bedeutung.

Literaturverzeichnis

AMES, W.F. "Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering" Academic Press, New York - London, 1965

ANSORGE, R. "Die ADAMS-Verfahren als Charakteristiken-Verfahren höherer Ordnung zur Lösung von hyperbolischen Systemen halblinearer Differentialgleichungen" Numerische Mathematik 5, 1963, S. 443 - 46o

ARAKAWA, AKIO "Computational Design for Long-Term Numerical Integration of the Equations of Fluid Motion: Two-Dimensional Incompressible Flow, Part I" Journal of Computational Physics, 1, 1966, S. 119 - 143

BLECK, R. "Lineare Approximationsmethoden zur Bestimmung ein- und zeidimensionaler numerischer Filter der dynamischen Meteorologie" Diplom-Arbeit, Institut für Theoretische Meteorologie, Berlin, 1965

BOLIN, B. "Numerical Forecasting with the Barotropic Model" Tellus 7, 1955, S. 27 - 49

BOLIN, B. "An Improved Barotropic Model and some Aspects of Using the Balance-Equation for Three-Dimensional Flow" Tellus 8, 1956, S. 61 - 75

BOURKE, W. "A Multi-Level Spectral Model. I. Formulation and Hemispheric Integrations" Monthly Weather Review 1o2, 1974, S. 687 - 7o1

COLLATZ, L. "The Numerical Treatment of Differential Equations" Springer, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 3-te Auflage, 1963

COLLATZ, L. "Funktionalanalysis und numerische Mathematik" Springer, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1964

DAVIES, H.C. "On the Coupling of Course and Fine Mesh Prediction Models" The GARP Programme on Numerical Experimentation, Report 4, Juni 1974, S. 83

EDELMANN, W. "Barotrope Modelle mit Lärmfilterung" Promet, DWD Offenbach, 1'1973, S. 11 - 15

EDELMANN, W.; REISER, H. DWD Offenbach, Technical Note 4, 31.12.1961

EDELMANN, W.; REISER, H. DWD Offenbach, Technical Note 5, 31.5.1962

ELSAESSER, H.W. "Evaluation of Spectral versus Grid Methods of Hemispheric Numerical Weather Prediction" J. of Applied Meteorology 5, 1966, S. 246 - 262

FEHLBERG, E. "Low-Order Classical RUNGE - KUTTA - Formulas with Stepsize Control and their Application to some Heat Transfer Problems" NASA Technical Report 315, Washington 1969

FEHLBERG, E. "Klassische RUNGE - KUTTA - Formeln 4-ter und niedrigerer Ordnung mit Schrittweiten-Kontrolle und ihre Anwendung auf Wärmeleitungsprobleme" Computing 6, 197o, S. 61 - 71

FISCHER, G. und Mitarbeiter "Einige vorbereitende Experimente zur Simulation der allgemeinen atmosphärischen Zirkulation" Bericht über das 4. SPAAZ - Seminar 21. - 23. 5. 197o, S. 136 - 175

FORTAK, H. "Vorlesungen über Theoretische Meteorologie: Kinematik der Atmosphäre" Institut für Theoretische Meteorologie, Berlin 1967

FRANKEL, S. P. "Convergence Rates of Iterative Treatments of Partial Differential Equations" Mathematical Tables and other Aids to Computation 4, 195o, S. 65 - 75

GANDIN, L. S. "Objective Analysis of Meteorological Fields" Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem 1965

GATES, W. L. "On the Truncation Error, Stability and Convergence of Difference Solutions of the Barotropic Vorticity Equation" J. of Meteorology 16, 1959, S. 156 - 168

GRIGORIEFF, R. D. "Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen" Teubner, Stuttgart, 1972

GRÖBNER, W. KNAPP, H. "Contributions to the Method of LIE Series" B - I - Hochschulskripten 8o2/8o2a, Mannheim, 1967

GUTSCHE, B. "Monte - Carlo - Simulation der Ausbreitung von Auto-Abgasen in Straßenschluchten", in Vorbereitung

HALTINER, G. J. "Numerical Weather Prediction" Wiley, New York, 1971

HINKELMANN, K. "Der Mechanismus des meteorologischen Lärms" Tellus 3, 1951, S. 285 - 296

HINKELMANN, K. KORB, G. "Die physikalische Bedeutung der Barotropie-Annahme" Promet, DWD Offenbach, 1'1973, S. 1 - 3

HINKELMANN, K. REISER, H. "Hydrostatische Approximation und Barotropie-Bedingung" Promet, DWD Offenbach, 1'1973, S. 3 - 6

HOLLMANN, G. "Transformation der Grundgleichungen der dynamischen Meteorologie in Koordinaten der stereographischen Projektion zum Zwecke der numerischen Vorhersage" Beiträge zur Physik der Atmosphäre 31, 1959, S. 162 - 176

KREISS, H. - O. OLIGER, J. "Comparison of Accurate Methods for the Integration of Hyperbolic Equations" Tellus 24, 1972, S. 199 - 215

LEITH, C.E. "Atmospheric Predictability and Two-Dimensional Turbulence" J. of the Atmospheric Sciences 28, 1971, S.145 - 161

LORENZ, E.N. "Deterministic Non-Periodic Flow" J. of the Atmospheric Sciences 2o, 1963, S.448 - 464

MAINE, R. "Experiments with the Barotropic Model in the Australian Region" Australian Meteorological Magazine 15, Melbourne 1967, S.169 - 189

MERILEES, P.E. "Numerical Experiments with the Pseudospectral Method in Spherical Coordinates" The GARP Programme on Numerical Experimentation, Report 7, Dezember 1974, S.215 - 264

MIYAKODA, K. "Numerical Calculation of Laplacian and Jacobian Using 9 and 25 Gridpoint Systems" J. of the Meteorological Society of Japan 38, 196o[a], S.94 - 1o6

MIYAKODA, K. "Test of Convergence Speed of Iterative Methods for Solving 2 and 3 Dimensional Elliptic-Type Differential Equations" J. of the Meteorological Society of Japan 38, 196o[b], S.1o7 - 124

OLIGER, J.E.
WELLCK, R.E.
KASAHARA, A.
WASHINGTON, W.M. "Description of NCAR Global Circulation Model" NCAR Technical Note STR - 56, Boulder (Col.), Mai 197o

REYMANN, G. "Zur Beurteilung von Vorhersagekarten" Meteorologische Rundschau 11, 1958, S.13 - 19

RICHTMYER, R.D. "A Survey of Difference Methods for Non-Steady Fluid Dynamics" NCAR Technical Note 63 - 2, 1963

SADOURNY, R.
ARAKAWA, A.
MINTZ, Y. "Integration of the Non-Divergent Barotropic Vorticity Equation with an Icosahedral-Hexagonal Grid for the Sphere" Numerical Simulation of Weather and Climate, Technical Report 2, Los Angeles, November 1967

SHELDON, J.W. "Iterative Methods for the Solution of Elliptic Partial Differential Equations" Mathematical Methods for Digital Computers (Ed. RALSTON, J. and WILF, S.), Wiley, New York, 1962, S.144 - 156

STRAEDE, J.O. "A Study of Finite Difference Approximations to Differential Operators" M.Sc. Thesis, Melbourne University, März 1967

TALAGRAND, O. "On the Damping of High-Frequency Motions in Four-Dimensional Assimilation of Meteorological Data" J. of the Atmospheric Sciences 29, 1972, S.1571 - 74

THOMPSON, P.D. "Numerical Weather Analysis and Prediction" Mc Millan, New York, 1961

TOST, R. "Lösung der ersten Randwertaufgabe der LAPLACE - Gleichung im Rechteck mit intervall-analytischen Methoden" Berichte der GMD, Bonn/Birlinghoven, 197o

WALLINGTON, C.E. "The Use of Smoothing or Filtering Operators in Numerical Forecasting" Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society 88, London 1962, S.47o - 484

WANNER, G. "Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen (LIE - Reihen, RUNGE - KUTTA - Methoden)" B - I - Hochschultaschenbuch 831/831a, Mannheim, 1969

WILLIAMSON, D.L. "Description of NCAR's Fine-Mesh Limited-Area Model and the Lateral Boundary Conditions" Conference on Modelling Aspects GATE, 24. - 27.1.1973, Tallahassee, Florida

YOUNG, D. "Iterative Methods for Solving Partial Difference Equations of Elliptic Type" Transactions of the American Mathematical Society 76, 1954, S. 92 - 111

ZURMUEHL, R. "Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker" Springer, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 3-te Auflage, 1961

Research in Objective Weather Forecasting, Part E: "Barotropic Forecasts with the Primitive Equations" by the Staff Members Research Division DWD Offenbach, Technical (Final) Report, 31.12.196o

Anhang A

(5oo mb - Analysen - und - Prognosefelder)

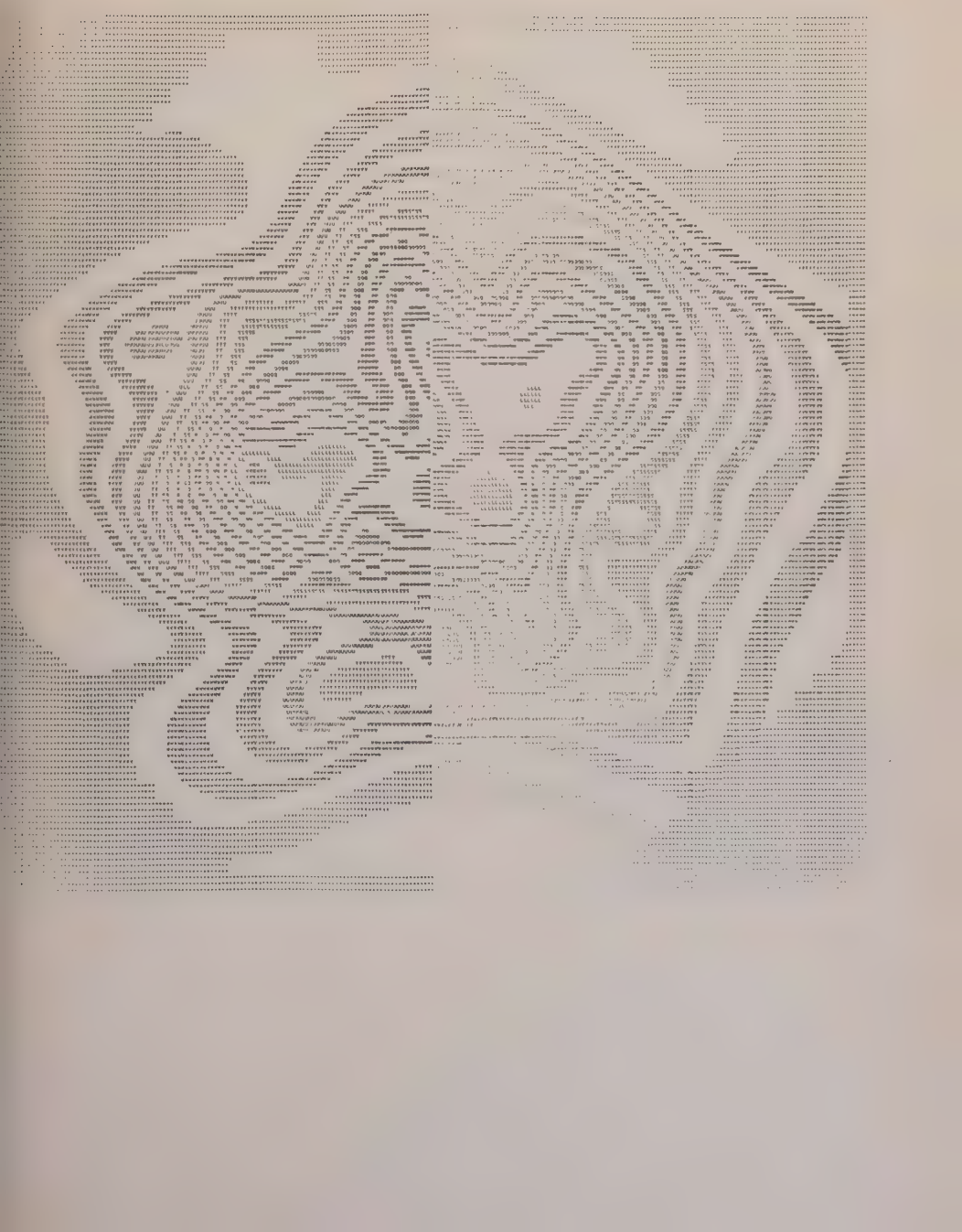
Auf den Seiten 59 bis 63 sind die folgenden 5oo mb - Felder als Zebra-analysen zusammengestellt:

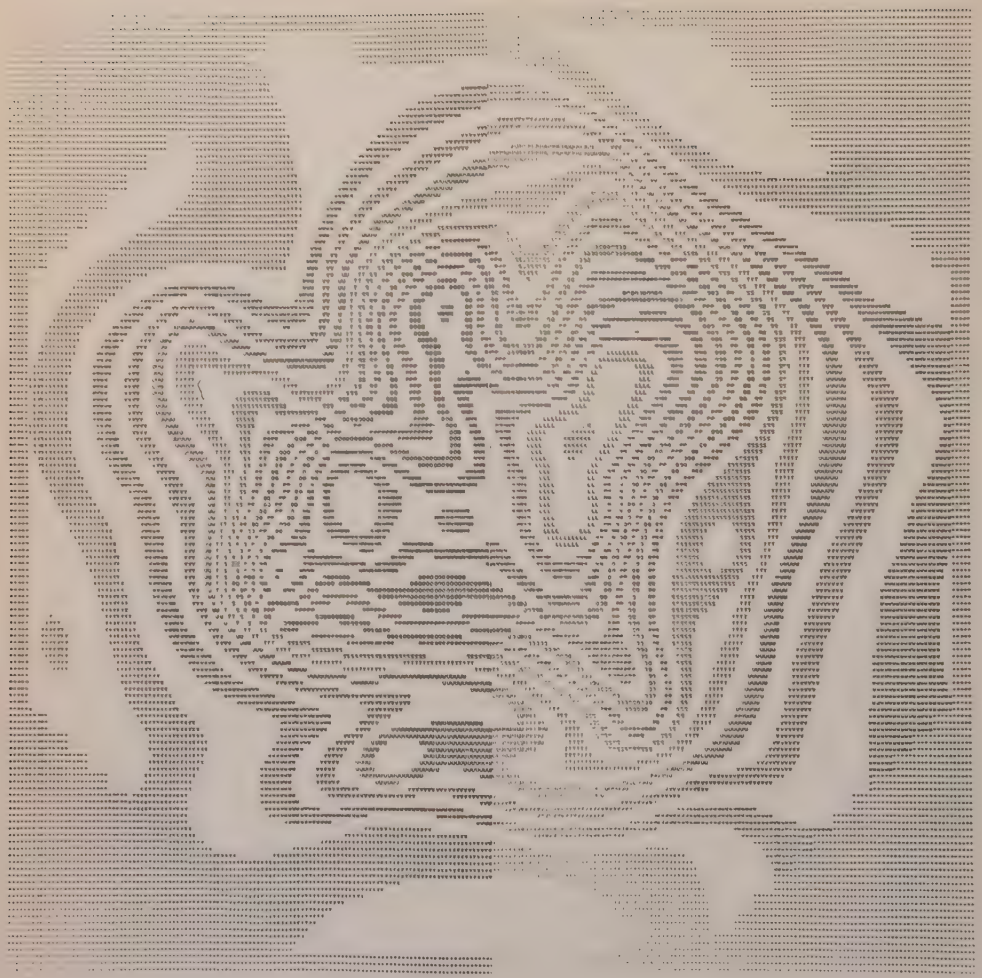
die Analyse (0 Uhr MGZ) der Ausgangswetterlage
vom 4. Januar 1962 S. 59

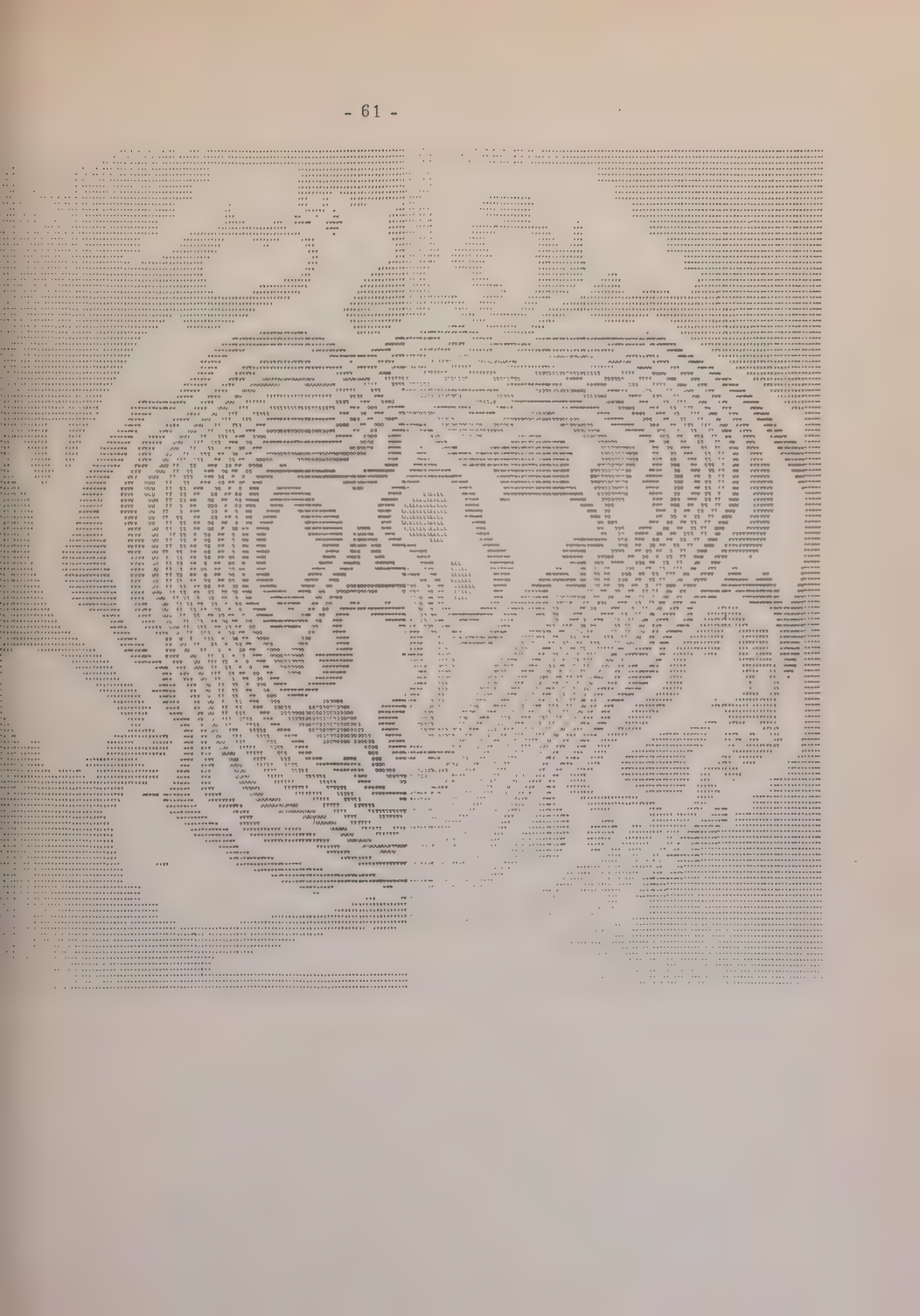
die Analyse (0 Uhr MGZ) der (nach 24 Stden.) eingetre-
nen Wetterlage vom 5. Januar 1962 S. 6o

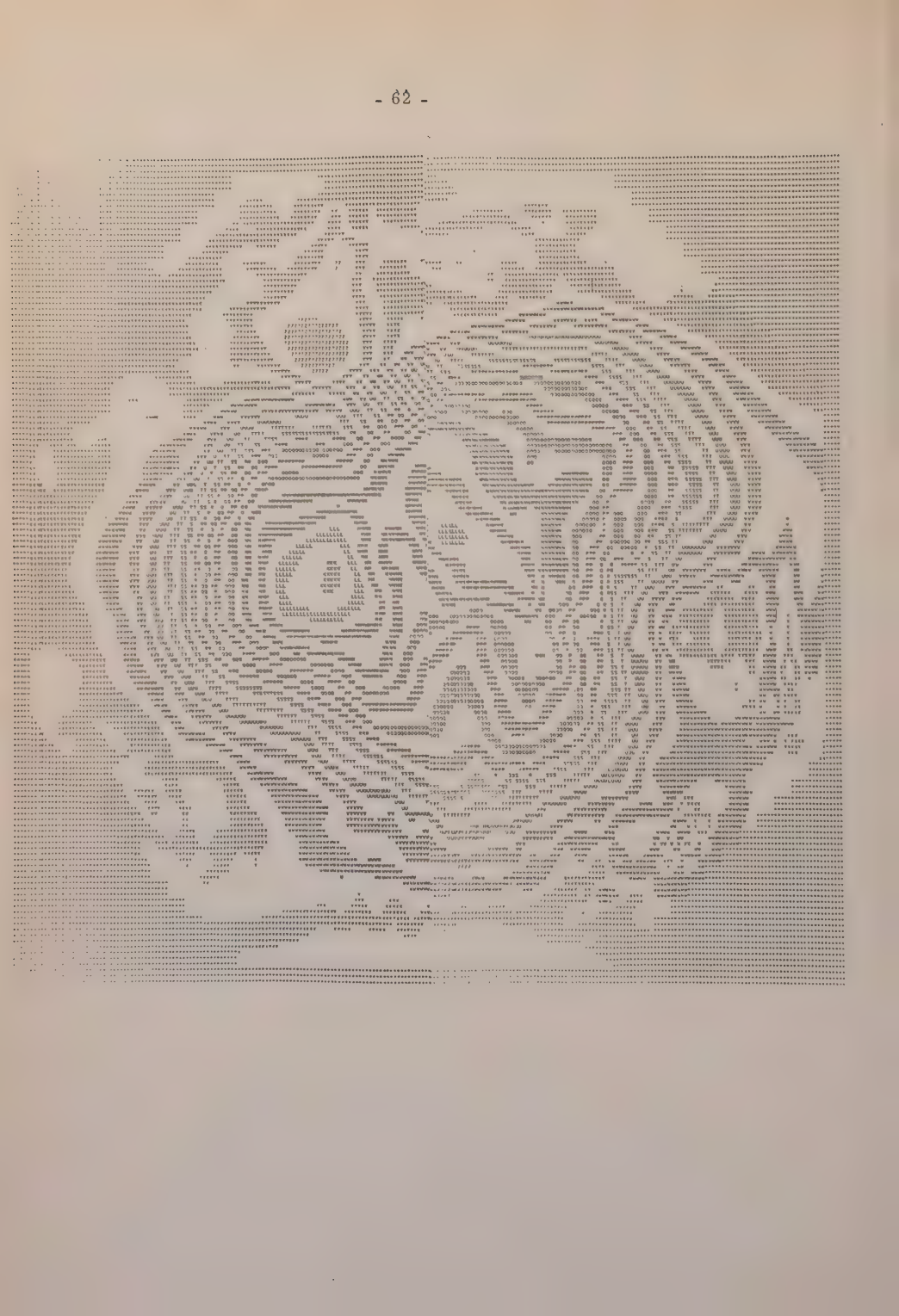
die mit PRED32 prognostizierten Wetterlagen
4. Jan. 00 MGZ + 24 Stden. S. 61
4. Jan. 00 MGZ + 3o Stden. S. 62

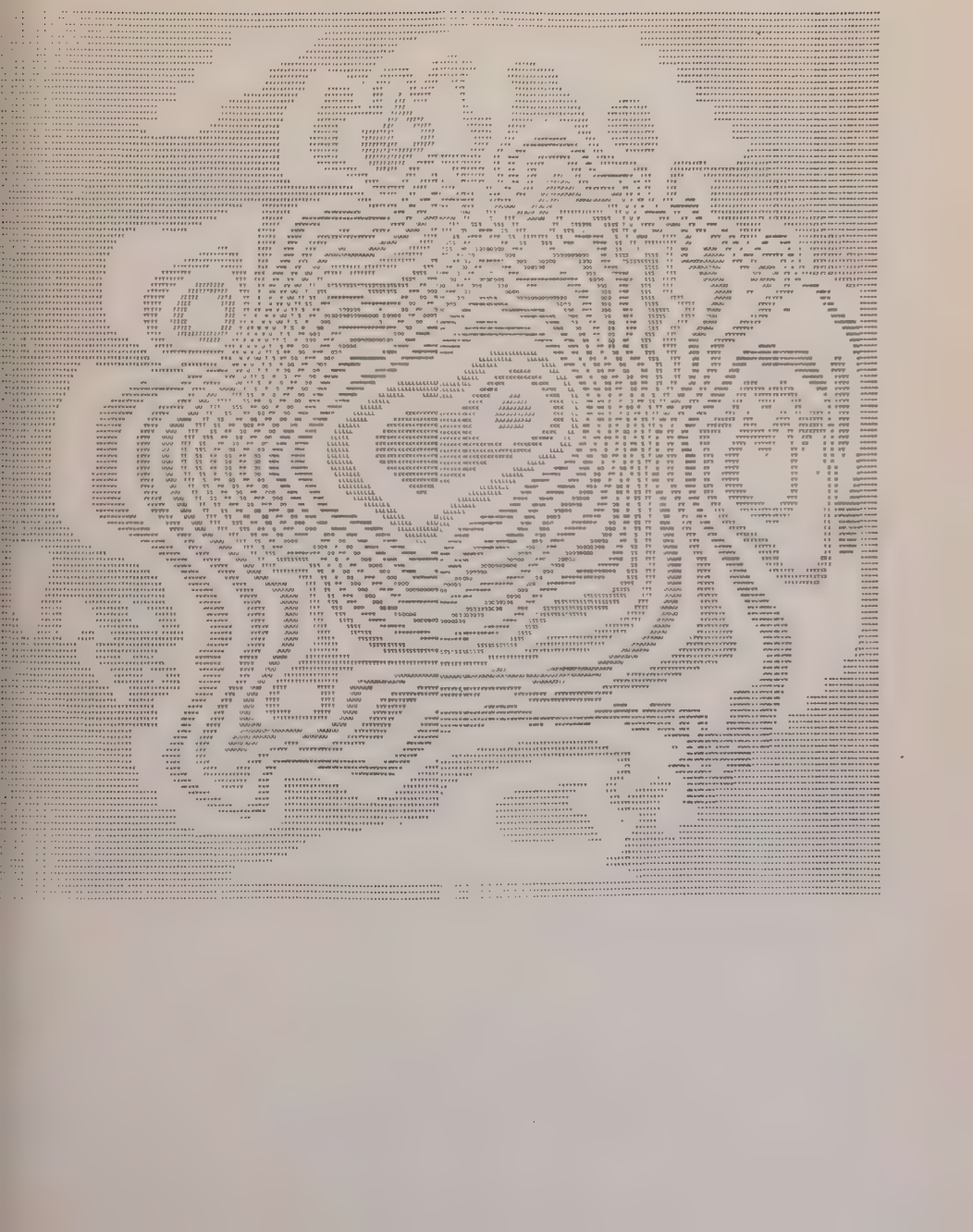
die mit PRED31 prognostizierte Wetterlage
4. Jan. 00 MGZ + ca. 24 Stden. S. 63







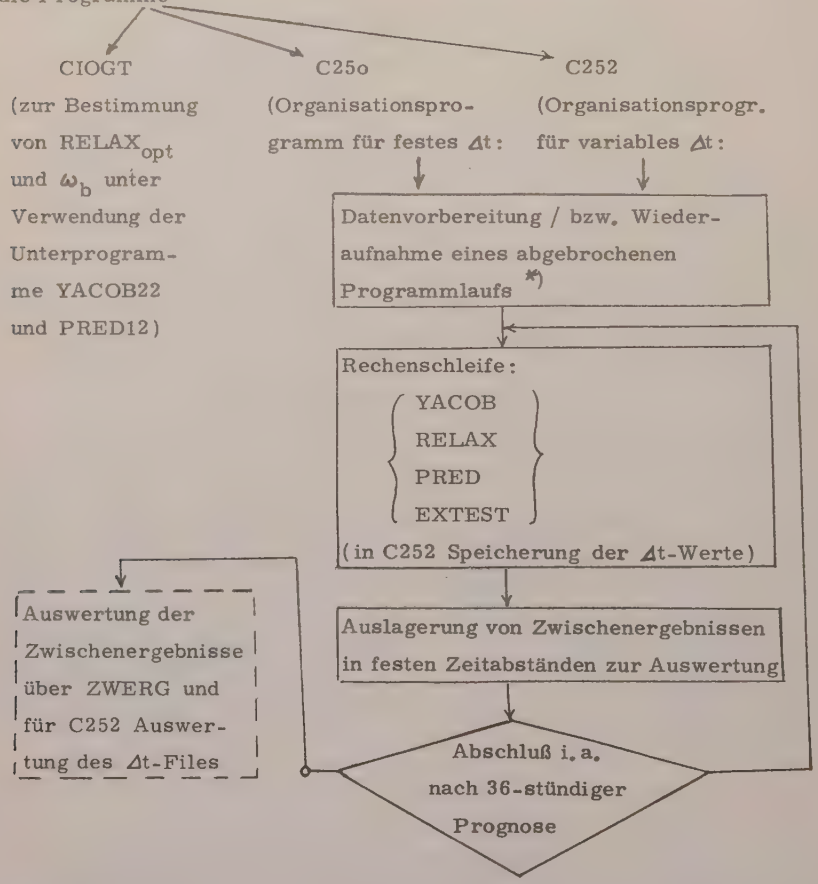




Anhang B

(Überblick über den Programmablauf)

Über STEPRO (S. 65 - 69) wird PHI_{ij} bestimmt.
Dann erfolgt die Erstellung des Datenfiles (ZG_{ij}, PHI_{ij}, Z_{ij}, DZ_{ij}) unter Verwendung von FILT (mit Spiegelungsmöglichkeit am Rand) für die Programme



*) Die Programme sind so gestaltet, daß sie beliebig unterbrechbar und mit nur geringem Rechenzeitverlust fortsetzbar sind.

```
      PROGRAM STEPPO(TAPE10,TAPE11,TAPE12,
     1               INPUT,OUTPUT,PUNCH,TAPE61=OUTPUT,TAPE62=PUNCH)
C
CS516HP  GITTERNETZ IN STEREOGRAPH. PROJ.
C
CF516              (HEMISPHAERISCH  ODER  ACHSENPARALL. RECHTECK)
C
C             *****   PROGRAMM-BESCHREIBUNG   *****
C
C+1   DAS  PROGRAM   S T E P R O    BESTIMMT AN IN DER PROJEKTION
C+2   AEQUIDISTANTEN GITTERPUNKTEN  ( PROJ.ZENTRUM IM SUEDPOL  / NORDPOL
C+3   ENTWEDER ALS GITTERPUNKT ENTHALTEN ODER IM ZENTRUM EINER GITTER-
C+4   MASCHE )  :
C+5
C+6       A )    PHI-WERTE IM BOGENMASS FUER EIN HEMISPHAERISCHES GITTER
C+7
C+8       B )    PHI-WERTE IN WINKELGRAD                 ]
C+9                                                      ]
C+10      C )    ABSTAENDE DER G.P. VOM NP IN KM         ]   B) - E)  FUER EINEN
C+11                                                     ]     QUADRANTEN DER
C+12      D )    ABST. BENACHBARTER G.P. ZUEINANDER      ]     HEMISPHAERE
C+13                                                     ]
C+14      E )    LAENGENWERTE IN WINKELGRAD              ]
C+15
C+16      F )    PHI-WERTE IM BOGENMASS FUER EIN ACHSENPARALL. RECHTECK
C+17
C+18  B) - E)  AUSGABE AUF DEM ZEILENDRUCKER  /  A,F  VERSCHIEDENE AUS-
C+19  GABE-KANAELE MOEGLICH.      -      DAS PROGRAMM ERWARTET DIE EINGABE
C+20  FOLGENDER PARAMETER :
C+21
C+22     (I2)    KSTEU    ( =1 :  MIT ANLAUFRECHNUNG FUER EINEN QUADRANTEN
C+23                                                    PHI(I,J)-WERTE
C+24                      =2 :  WIEDERHOLUNG OHNE ANLAUFRECHNUNG, D.H.
C+25                            UNTER VERWENDUNG DER PHI(I,J)-WERTE
C+26                            AUS DER ALTEN ANLAUFRECHNUNG  )
C+27
C+28     N U R   BEI ANLAUFRECHNUNG
C+29       (3F10.0,3I2)    PHIO (LAGE DER PROJ.EBENE IN WINKELGRAD),
C+30                       R (ERDRADIUS IN KM), W (MASCHENWEITE IN KM),
C+31                       N (<50, ANZAHL DER PKTE. FUER DIE SEITENLAENGE
C+32                       EINES QUADRANTEN), KA (=1 MIT NP, =2 OHNE NP)
C+33
C+34     (7I2)      N (WIE OBEN, JEDOCH NICHT GROESSER ALS DER WERT IN DER
C+35                ZUG. ANLAUFR.), LL(I=1,6) ( STEUERZAHLEN ZU A) - F) )
C+36             LL(I) = 0   :  ZUG. AUSGABE WIRD UNTERDRUECKT
C+37             LL(I) ≠ 0   :  ZUM ZUG. I  EINGABE EINER  FORMAT-KLAMMER
C+38                            FUER DIE FORMATIERUNG EINER AUSGABE-ZEILE
C+39
C+40     ZUSAETZLICH ERWARTET
C+41
C+42        LL(1) ≠ 0    (I2)    KB  (STEUERUNG DES AUSGABE-KANALS :
C+43                  KB = 61 ODER 62  FUER STANDARD-AUSGABE ,
C+44                  KB = 1,2,...59  BINAER AUF PLATTEN-FILE MIT DEN KB ,
C+4A                          IN DER PROGRAM-KARTE SIND  KB = 10, 11, 12
C+4B                          AUF DEN ERSTEN DREI PLAETZEN VORGENOMMEN ,
C+45                  KB = 0    KEINE AUSGABE     )
C+46                  (  LL(1) < 0   LIEFERT ZUSAETZLICHE STANDARD-AUSGABE
C+47                                 DES PHI-QUADRANTEN IM BOGENMASS  )
C+48
C+49        LL(5) ≠ 0    (F10.0)     LAMBDAC
C+50
```

```
C+51        LL(6) ≠ 0    (4I4)   IA,JA,IE,JE (ECKBEGRENZUNGEN BEZOGEN
C+52                             AUF DEN NP), KB (PLATTEN-DSI DES HEMIS-
C+53                             PHAERISCHEN PHI-FELDES), KC (STEUERUNG
C+54                             DES AUSGABE-KANALS WIE UNTER LL(1),
C+55                             JEDOCH MIT KC > 0 )
C+56                  ( DER KB-FILE MUSS NAT. VORHER ENTSPRECHEND
C+57                               BINAER BESCHRIEBEN WORDEN SEIN )
C
C             *****   ENDE DER PROGR.-BESCHR.   *****
C
      COMMON PHI(50,50)
      DIMENSION LL(6),T(100),IVAR(20)
 1    READ 1000,KSTEU
      GO TO (2,4,8),KSTEU
 2    READ 1010,PHIO,R,W,N,KA
      PHIOB=PHIO/57.295779
      RO=R*SIN(PHIOB)
      RR=R+RO
      GO TO (10,20),KA
 10   NNPP=4H MIT
      GO TO 30
 20   NNPP=4HOHNE
 30   DO 60 J=1,N
      DO 60 I=1,N
      GO TO (40,50),KA
 40   C=W*SQRT(FLOAT(I*(I-2)+J*(J-2)+2))
      GO TO 60
 50   C=W*SQRT(.5+(I*(I-1)+J*(J-1)))
 60   PHI(I,J)=1.5707954-2.*ATAN(C/RR)
      PRINT 1100,PHIO,R,W,NNPP,N
C
C        ENDE DER ANLAUFRECHNUNG
C
 4    READ 1000,N,LL
      DO 80 IK=1,6
      IF(LL(IK).EQ.0)  GO TO 80
      READ 1020,IVAR
      GO TO (100,200,300,400,500,600),IK
 100  PRINT 1120,NNPP,N
      READ 1000,KB
      IF (LL(1).GT.0)  GO TO 105
      DO 102 J=1,N
 102  PRINT 1050,(PHI(I,J),I=1,N)
 105  IF (KB.EQ.0)  GO TO 80
      IF (KB.EQ.61.OR.KB.EQ.62)  WRITE (KB,1125) NNPP
      IF (KB.LT.60)  REWIND KB
      GO TO (110,120),KA
 110  NN=2*N-1
      N2=N-1
      GO TO 130
 120  NN=2*N
      N2=N
 130  N1=N+1
      DO 160 J=1,N
      J1=N+1-J
      DO 140 I=1,N
      I1=N+1-I
 140  T(I)=PHI(I1,J1)
      DO 150 I=N1,NN
      I1=I-N2
 150  T(I)=PHI(I1,J1)
      IF (KB.GT.60)  WRITE (KB,IVAR) (T(I),I=1,NN)
      IF (KB.LT.60)  WRITE (KB) (T(I),I=1,NN)
 160  CONTINUE
```

```
      DO 190 J=N1,NN
      J1=J-N2
      DO 170 I=1,N
      I1=N+1-I
  170 T(I)=PHI(I1,J1)
      DO 180 I=N1,NN
      I1=I-N2
  180 T(I)=PHI(I1,J1)
      IF (KB.GT.60)  WRITE (KB,IVAR) (T(I),I=1,NN)
      IF (KB.LT.60)  WRITE (KB) (T(I),I=1,NN)
  190 CONTINUE
      IF (KB.EQ.62)  WRITE (KB,1170)
      IF (KB.LT.60)  PRINT 1175,KB
      GO TO 80
  200 PRINT 1130,NNPP,N
      DO 220 J=1,N
      DO 210 I=1,N
  210 T(I)=PHI(I,J)*57.295779
  220 WRITE (61,IVAR) (T(I),I=1,N)
      GO TO 80
  300 PRINT 1140,NNPP,N
      DO 320 J=1,N
      DO 310 I=1,N
  310 T(I)=R*(1.5707964-PHI(I,J))
  320 WRITE (61,IVAR) (T(I),I=1,N)
      GO TO 80
C
C400      ABSTAND DER GITTERPUNKTE UNTEREINANDER
C
  400 PRINT 1150,NNPP,N
      DO 440 J=2,N
      WRITE (61,1060)
      K=1
      GO TO (402,452),KA
  402 DO 420 I=2,N
      GO TO (405,409),K
  405 B=PHI(I,J-1)
      IF(J-2)407,407,408
  407 X=1.5707964-ATAN(FLOAT(I-1)/FLOAT(J-1))
      GO TO 413
  408 SI=I-1
      SJ=J-2
      XX=-1.
      GO TO 410
  409 SI=I-2
      SJ=J-1
      B=PHI(I-1,J)
      XX=1.
  410 SII=I-1
      SJJ=J-1
      X=XX*(ATAN(SII/SJJ)-ATAN(SI/SJ))
  413 C=PHI(I,J)
      CO=SIN(B)*SIN(C)+COS(B)*COS(C)*COS(X)
      IF (ABS(CO)-1.) 417,415,415
  415 T(I)=0.
      GO TO 420
  417 T(I)=R*ATAN(SQRT(1.-CO*CO)/CO)
  420 CONTINUE
      GO TO 425
```

```
 452  DO 460 I=2,N
      GO TO (453,454),K
 453  SI=2*I-1
      SJ=2*J-3
      B=PHI(I,J-1)
      XX=-1.
      GO TO 455
 454  SI=2*I-3
      SJ=2*J-1
      B=PHI(I-1,J)
      XX=1.
 455  SII=2*I-1
      SJJ=2*J-1
      X=XX*(ATAN(SII/SJJ)-ATAN(SI/SJ))
      C=PHI(I,J)
      CO=SIN(B)*SIN(C)+COS(B)*COS(C)*COS(X)
      IF (ABS(CO)-1.) 458,457,457
 457  T(I)=0.
      GO TO 460
 458  T(I)=R*ATAN(SQRT(1.-CO*CO)/CO)
 460  CONTINUE
 425  WRITE (61,IVAR) (T(I),I=2,N)
      GO TO (430,440),K
 430  K=2
      GO TO (402,452),KA
 440  CONTINUE
      GO TO 80
 500  READ 1010,XO
      PRINT 1160,XO,NNPP,N
      DO 540 J=1,N
      IF (KA.EQ.1.AND.J.EQ.1)  GO TO 532
      DO 530 I=1,N
      GO TO (510,520),KA
 510  X=FLOAT(I-1)/FLOAT(J-1)
      GO TO 530
 520  X=FLOAT(2*I-1)/FLOAT(2*J-1)
 530  T(I)=XO+ATAN(X)*57.295779
      GO TO 540
 532  DO 533 I=1,N
 533  T(I)=XO+90.
 540  WRITE (61,IVAR) (T(I),I=1,N)
      GO TO 80
C
C600      ACHSENPARALLELES RECHTECK
C
 600  READ 1030,IA,JA,IE,JE,KB,KC
      PRINT 1180,NNPP,N,IA,IE,JA,JE
      REWIND KB
      IF (KC.LT.30)  REWIND KC
      GO TO (610,612),KA
 610  NN=2*N-1
      IA=N+IA
      IE=N+IE
      JA=N+JA
      JE=N+JE
      GO TO 620
 612  NN=2*N
      IA=N+IA+1
      IE=N+IE+1
      JA=N+JA+1
      JE=N+JE+1
 620  DO 640 J=1,NN
      READ (KB) (T(I),I=1,NN)
      IF (J.LT.IA)  GO TO 640
      IF (KC.LT.60) WRITE (KC) (T(I),I=JA,JE)
      IF (KC.GT.60) WRITE (KC,IVAR) (T(I),I=JA,JE)
      IF (J.GE.IE)  GO TO 650
 640  CONTINUE
```

```
600   PRINT 1175,KC
80    CONTINUE
      GO TO 1
8     STOP
1000  FORMAT(10I2)
1010  FORMAT(3F10.0,10I2)
1020  FORMAT(20A4)
1030  FORMAT(10I4)
1050  FORMAT(1H-,15F8.3,(/9X,14F8.5))
1060  FORMAT(1H )
1100  FORMAT(*1*,3(/*-*),20X,*STEREOGRAPH. PROJ. MIT DEN PARAMETERN :*
     +   /*-*,30X,*PHI0 =*,F5.0,* GRAD,  EPORADIUS *,F9.3,* KM,  MASCHEN
     +WEITE *,F7.2,* KM*/*-*,45X,A4,* NP ALS GITTERPUNKT UND N =*,I3)
1120  FORMAT(1H1,10X,*PHI-WERTE IM BOGENMASS *,A4,* NP FUER N =*,I3)
1125  FORMAT(1H-,*AUSGABE FUER HEMISPHAERE *,A4,* NP*)
1130  FORMAT(1H1/20X,22HPHI-FELD IN WINKELGRAD,10X,A4,* NP FUER N =*,I3/
     +   1H-)
1140  FORMAT(1H1/20X,20HABSTAND VOM NP IN KM,10X,A4,* NP FUER N =*,I3/
     +   1H-)
1150  FORMAT(1H1/10X,36H1-TE ZEILE SENKRECHTER GITTERABSTAND/10X,37H2-TE
     1 ZEILE WAAGERECHTER GITTERABSTAND/40X,A4,* NP FUER N =*,I3)
1160  FORMAT(1H1/20X,26HLAENGENFELD FUER LAMBDA0 =,F7.2,10X,A4,* NP FUER
     + N =*,I3/1H-)
1170  FORMAT(*-    AUSGABE FUER PR. C250FF BEENDET*)
1175  FORMAT(*-  AUSGABE FUER PR. C250FF AUF DSI*,I3,* BEENDET*)
1180  FORMAT(1H1/10X,*AUSGABE FUER RECHTECK-FELD *,A4,* NP FUER N =*,I3/
     +   30X,*MIT  IA =*,I3,*   IE =*,I3,*   JA =*,I3,*   JE =*,I3/1H-)
      END
```

L e b e n s l a u f

Am 13. 6. 194o wurde ich - Lutz Blumhagen - als Sohn des Alfred Blumhagen und seiner Ehefrau Ilse, geb. Nürnberg, in Berlin geboren. Von 1946 bis 1952 besuchte ich die 1. Grundschule in Berlin-Wilmersdorf, anschließend von 1952 bis 1959 den mathematisch-naturwissenschaftlichen Zug der Friedrich-Ebert-Schule. Dort bestand ich das Abitur am 4. 3. 1959. Vom SS 1959 bis zum WS 1964/65 studierte ich an der Freien Universität Berlin im Hauptfach Mathematik mit den Nebenfächern Meteorologie und Physik. Das Vordiplom legte ich am 19. 5. 1961 ab, und das Diplom bestand ich am 1o. 12. 1964 mit dem Thema der Diplom-Arbeit "Über das Stabilitätsproblem im kritischen Fall eines rein imaginären Wurzelpaares bei autonomen Differentialgleichungssystemen". Seit dem 1. 1. 1965 bin ich wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Theoretische Meteorologie - jetzt WE o4 des FB 24 - der Freien Universität Berlin tätig. Schon während meines Studiums legte ich mein Hauptinteresse auf die Angewandte Mathematik, und während meiner folgenden wissenschaftlichen Tätigkeit an der Freien Universität Berlin wendete ich meine mathematischen Kenntnisse in der Meteorologie an, in der ich meine Kenntnisse ebenfalls erweiterte. Aus dieser Tätigkeit entsprang auch die Idee zu meiner Dissertation "Objektivierung und Optimierung der Zeitschrittwahl bei Prognosegleichungen am Beispiel eines äquivalent-barotropen Modells für die Nord-Hemisphäre".

Berlin, den 26. 6. 1975